געאָמעטריע

עלעמענטאַרער קורס

פֿאַר דער שולע און צום אַליינלערנען

מיט אויפֿגאַבען

צונויפֿגעשטעלט פֿון מרדכי זאַבלודאָווסקי

ערשטער טייל

פֿאַרלאַג „קולטור־ליגע"

ביאַליסטאָק

1919

ISBN:0-657-12397-8

8416

[illegible] ג. ב. מינקאָ, ביאַליסטאָק [illegible]

GEOMETRYE

Mordechai Zabludowski

NATIONAL YIDDISH BOOK CENTER
AMHERST, MASSACHUSETTS
413 256-4900 | YIDDISH@BIKHER.ORG
WWW.YIDDISHBOOKCENTER.ORG

•

MAJOR FUNDING FOR THE
STEVEN SPIELBERG DIGITAL YIDDISH LIBRARY
WAS PROVIDED BY:

Lloyd E. Cotsen Trust
Arie & Ida Crown Memorial
The Seymour Grubman Family
David and Barbara B. Hirschorn Foundation
Max Palevsky
Robert Price
Righteous Persons Foundation
Lief D. Rosenblatt
Sarah and Ben Torchinsky
Harry and Jeanette Weinberg Foundation
AND MEMBERS AND FRIENDS OF THE
National Yiddish Book Center

•

The *goldene pave*, or golden peacock, is a traditional symbol of Yiddish creativity. The inspiration for our colophon comes from a design by the noted artist Yechiel Hadani of Jerusalem, Israel.

געאמעטריע

עלעמענטארער קורס

פאַר דער שולע און צום אליינלערנען

מיט אויפגאבעס

צונויפגעשטעלט פון

מרדכי זאבלודאווסקי

ערשטער טייל.

פארלאג „קולטור-ליגע"

ביאליסטאק.

1919

דרוקעריי מ. ב. מירסקי, קויפמאן גאס № 1

ביאליס-
טאקער
קולטור
ליגע
ראיאן

מײַן לײַבלאָבן פאַטער, מײַן טאַטן אין אידיש,
נח זאבלוּדאָווסקי'ן (בר—נש) ווידמע איך
מײַן ערשטן פרוּב אין אידיש.

פון צונויפשטעלער.

דער פאָרליגנדיגער בוך איז באַשטימט פאַר'ן פערטן קלאַס פון אַ מיטל־שולע. לויט מײַן מיינונג, פאַרמאָגט דאָס אידישע קינד אַ מער אנטוויקלטע פייהיגקייט אויפצונעמען די מאַטעמאַטיקע ווי אַזאַ, וועלכע לערער ניט־אידן פאָדערן פון זייערע שילער. אויף דעם שטרעבן זיך צו צופאַסן צו אָט דער פייהיגקייט בויט זיך די אײַגנאַרטיגקייט און דער אונטערשייד פון דעם פאָרליגנדיגן בוך פון יענע געאָמעטרישע לערביכער אין דער רוסישער שפראַך, מיט וועלכע דער לעזער איז מיסטנטייל באַקאַנט.

די אײַנלייטונג איז באַהאַנדלט מער באריכות, ווי עס איז געוויינלאַך אָנגענומען. ווי טרוקן זי זאָל ניט אויסקומען אין און פאַר זיך, קען זי פון דעם געניטן לערער דורכגעמאַכט ווערן אַזוי, אַז דער קליינער געאָמעטער ווערט פאַראויס שטאַרק באַוואָפנט מיט דער קענטעניש גוט צו באַנעמען די פיגורן מיטן אויג און לאָגיש זיך צו פאַנאַנדערקלײַבן אין די זאַצן, וועלכע דריקן אויס די אייגנשאַפטן פון די פיגורן; צילבאַוואוסטזיניג פאָרשן מיט אייגענע קרעפטן און ניט איבערקײַען פאַרטיגע גרייטע געדאַנקען פון בוך, וועלכע „דערוואַקסענע חכמים” האָבן צונויפגעשטעלט, ער זאָל עס דאַרפן נאָר אַראָפּשלינגען. אַ סך זאַצן ווערן ניט דערפירט ביזן סוף, ווען דער ווײַטערדיגער וועג פון באַווײַז איז פרײַ פאַר'ן שילער אליין מיט זײַנע אייגענע קרעפטן. דער לערער דאַרף אין אַזאַ פאַל ניט שלעפן דעם שילער פאַר'ן האַנט.

די סימעטריע, וועלכע ווערט קוים באַרירט אין אַנדערע לערביכער, פאַרנעמט אין פאָרליגנדיגן בוך אַ בכבודיגן אָרט. עס וואָלט געווען אומפּעדאַגאָגיש ניט אויסנוצן די סימעטריע צום אנטוויקלען דעם „לעבעדיגן חוש” וואָס כמעט יעדערער האָט צו איר, בפרט נאָך, ווען מען קען זי אויסנוצן צום באַווײַז פון אַ סך זאַצן.

דיִ אויפגאַבעֶס, ווּעֶלכעֶ גיֵיעֶן אריין איִן אַ היִפּשעֶר צאָל איִן טעֶקסט צוויִשן דיִ לעֶרזאַצן, גיִבּן דיִ מעֶגלאַכקיֵיט באַלד אויפן פּריִשן זכרון אויסצונוּצן דיִ טעֶאָריִעֶ און זיִ בעֶסעֶר תופס צו זיַין.

וואָס אָנבאַלאַנגט דעֶר טעֶרמינאָלאָגיִעֶ, זיַינעֶן בכיון ניִט אָנגעֶנומעֶן געֶוואָרן אַ סך טעֶרמיִנעֶס, וועֶלכעֶ זיַינעֶן שוין אויסגעאַרבעֶט געֶוואָרן דורך קאָלעֶגן אויף דעֶם געֶביִט: עֶס איִז נאָך צו פריה, און קעֶן מעֶר שאַדן איידעֶר נוצן, צו פאַרשטיינערן איִן אַ וואָרט—און גאַנץ אָפּט אַן אומגעֶלונגעֶנעֶם—אַזעֶלכעֶ באַגריִפן, וועֶלכעֶ צאַפּלעֶן זיִך נאך אויפן אידיִשן צונג. ווּעֶרטעֶר דאַרפן נאָך קעֶמפן פאר זיֵיעֶר אייַנביִרגעֶרונג מיִט אַנדעֶרעֶ, אפשר בעֶסעֶרעֶ, געֶלונגעֶנעֶרעֶ פון זיֵי, און עֶרשט נאָכן נצחון פאַרביִרגעֶרט ווּעֶרן, אבעֶר ניִט אָנגעֶנומעֶן ווּעֶרן לויט אַ שטיִמעֶנמעֶרהייט פון לאָקאַלעֶ אַווטאָריִטעֶטן. דיִ שטרעֶבונג צו אייִנהייטלאַכקיַיט שוין איִן אַזא יונגעֶר סטאַדיִעֶ, שמעֶקט מיִט קאַנצעֶלאַריעֶ.

דאָס איִבעֶריִגעֶ ווּעֶגן בוּך ווּעֶלן זאָגן דיִ לעֶזעֶר, לעֶרעֶר און קריִטיִקעֶר... איִך האָב דאס בוּך צונויפגעֶשטעֶלט אַזוי גוט, ווי איִך בּיִן נאָר אומשטאַנד געֶוועֶן, און אויב דעֶר פרוּב מיַינעֶר וועֶט אויסגעֶנוּצט ווּעֶרן פון אַ בעֶסעֶרן טוּעֶר, אפיִלו אַלס מיסט אויף זיַין פעֶלד, ווּעֶל איִך פאַררעֶכעֶנעֶן מיַין ציִל פאַר דעֶרגרייִכט.

מ. ז.

קאפיטל א.

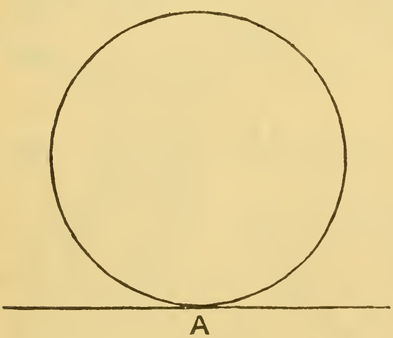
איינלייטונג

I.

1. דער רוים. דער גרויסער ארט, וואס ציהט זיך אומענדלאך ארום אלץ, וואס מיר באנעמען מיט אונזער אויג, הייסט רוים. אין דעם רוים געפינען זיך געגנשטאנדן, וועלכע פארנעמען א באשטימטן טייל פון רוים, למשל הייזער, שטיינער, ביימער, חיות, הימלישע קערפער, ווי למשל אונזער ערד, די לבנה, די זון, די שטערנס א. ה. ג. דער ארט, וועלכן די געגנשטאנדן פארנעמען, איז א טייל פון רוים, וועלכן זיי שליסן אין זיך אריין, און וועלכער איז פארמאכט פון אלע זייטן.

2. באשטימונג: א טייל פון רוים וועלכער איז ארומגעשלאסן פון אלע זייטן, הייסט געאמעטרישער קערפער, אדער פשוט קערפער.
לאמיר באטראכטן עטלאכע געאמעטרישע קערפער לויט זייער פארם און געשטאלט. דער חומר, דער שטאף, פון וועלכן די קערפער באשטייען, ווי אויך אלע אייגנשאפטן פון חומר, (למשל, זיין הארטקייט, פארב, טעמפעראטור א. ה. ג. זאל אונז דערביי ניט אינטערעסירן).

3. דער קויק. אזא קערפער הייסט, לויט זיין פארם און געשטאלט—קויק.



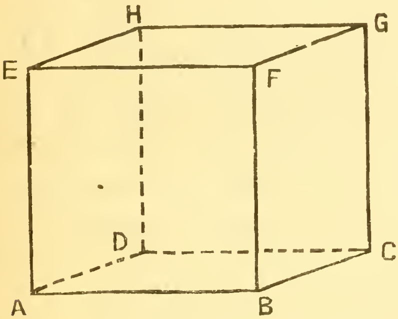
פיג. 1.

(פיג. 1.) ער שליסט אין זיך אריין א טייל פון רוים, וועלכער טיילט זיך אפ, גרעניצט זיך אפ, פון גאנצן אויסנווייניגסטן רוים מיט א גרעניץ, וועלכן מיר באטאפן ממשותדיג מיטן האנט, אדער באנעמען מיטן אויג. געאמעטריש אבער האט דער גרעניץ קיין שום ממשות, קיין שום קערפערלאכקייט.

4. באשטימונג: דער אויסגעדראכטער גרעניץ, וועלכער טיילט אויס דעם געאמעטרישן קערפער פון גאנצן ארומיגן רוים, הייסט אויבערפלעכע פון דעם קערפער.

די אויבערפלעכע פון א געאמעטרישן קערפער טיילט דעם רוים אין צוויי טיילן: איין טייל פון רוים ליגט אין דעם קערפער, דער צווייטער פון אויסנווייניג. א קערפער אן אן אויבערפלעכע קענען מיר זיך גארניט פארשטעלן.

.5 **דער קוב.** לאמיר איצט באטראכטן אן אנדער געאמעטרישן קערפער, וועלכער הייסט לויט זיין **פארם אין געשטאלט—קוב** (פיג. 2). דער קוב פארמאגט, זעלבסטפארשטענדלאך, אויך אן אויבערפלעכע, מיט וועלכער ער גרעניצט זיך אפ פון ארומיגן רוים, זי איז אבער ביי אים גאנין אנדערש ווי ביים קויק: די אויבערפלעכע פון קויק איז גאנין איינהייטלאך, ביים



פיג. 2.

קוב אבער באמערקן מיר, אז זיין אויבערפלעכע לאזט זיך איינטיילן אין באזונדערע טיילן, וועלכע אונטערשיידן זיך איינער פון אנדערן לויט זייער לאגע אין רוים. די טיילן, ווענטלאך, ווי מיר וועלן זיי ווייטער אנרופן, ליגן אזוי: צוויי—אויבן און אונטן, צוויי—רעכטס און לינקס, צוויי—פארנט און הינטן. אלע זעקס ווענטלאך בילדן די אויבערפלעכע פון קוב. יעדערע פון זיי, אלס א טייל פון דער אויבערפלעכע הייסט פלעכע. אין דעם ארט, וואו צוויי ווענטלאך, צוויי פלעכעס, קומען זיך צונויף, באמערקן מיר ווידער א גרעניץ צווישן זיי, א קאנט, וועלכער ציהט זיך אין דער לייננ און וועלכער טראגט דעם נאמען ליניע. די ליניע האט אויך ניט קיין שום ממשותדיגע דיקקייט אדער גרעב.

.6 באשטימונג: די ליניע איז דער גרעניץ פון א פלעכע.

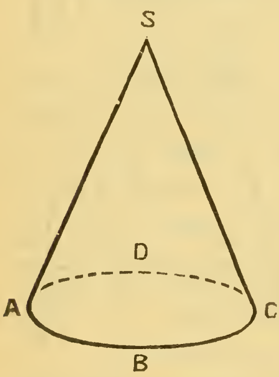
אויפן קוב לאזן זיך אנציילן צוועלף אזעלכע קאנטן, ליניעס. אין די ערטער וואו עס קומען זיך צונויף דריי ווענטלאך פון קוב, אדער דריי קאנטן (ליניעס) זעהען מיר די שפיצן פון קוב, וואו יעדע ליניע האקט זיך אפ, גרעניצט זיך אפ פון דער צווייטער. אזא ארט הייסט פונקט.

.7 באשטימונג: דער פונקט איז דער גרעניץ פון א ליניע, פון א קאנט.

אויפן קוב לאזן זיך אנציילן 8 אזעלכע פונקטן, אין וועלכע עס קומען זיך צונויף צו דריי פון זיינע קאנטן און וואו זיי האקן זיך אפ איינער פון אנדערן.

8. כדי צו אונטערשײדן די פונקטן אײנעם פון אנדערן, ווערט יעדער פונקט באַצײכנט מיט א וועלכן עס איז אות פון לאַטײנישן אלף=בית און מיר רופן אן דעם פונקט מיטן נאמען פון דעם אות, וועלכער שטײט נעבן אים. בײם שרײבן דעם נאמען, שטעלט מען דעם אות, וועלכער שטײט בײם פונקט. מיר זאגן: פונקט אַ, פונקט בע א. א. וו. און שרײבן: פונקט A, B. א ליניע, א קאַנט, ווערט באַצײכנט און אנגערופן מיט די נעמען פון 2 אותיות, וואס שטײען בײ אירע גרענעצן: ליניע אַ—בע פון קוב (פיג. 2) ליניע ע—עף, ליניע האַ—גע; שריפטלאך: ליניע AB, ליניע EF, ליניע HG א. א. וו. א פלעכע, א ווענטל, ווערט באַצײכנט און אנגערופן אויך דורך אותיות, וואס שטײען בײ וועלכע עס איז פון אירע פונקטן; למשל, די אויבערשטע ווענטל פון קוב הײסט ע—עף—גע—האַ, שריפטלאך: די ווענטל EFGH, די ווענטל בע—עף—גע—צע (רעכטס אויף דער פיג. 2), ווענטל BFGC.

9. דער קאָנוס. אַט אַזאַ קערפער הײסט לויט זײן פאָרם און געשטאַלט קאָנוס.



פיג. 3.

(פיג. 3) אין זײן אויבערפלעכע באַמערקן מיר צוויי טײלן, צוויי פלעכעס: די פוספלעכע ABCD, וואָס אויף איר ווערט דער קאנוס געוויינלאך אַוועקגעשטעלט און די זײטפלעכע, וועלכע קומט זיך צונויף אין דעם שפיצפונקט S (זעה פיג 3). צווישן די בײדע פלעכעס ציהט זיך אַ רונדער קאַנט, אַ ליניע, וועלכע האַקט זיך אין ערגיץ ניט אָפּ, ווײל די ליניע שליסט זיך אַלײן. מיט וואס אונטערשײדט זיך דער קאַנט פון קאנוס פון קאַנט פון קוב?

10. די גראַדע ליניע. לאמיר נעמען אַ וועלכן עס איז שטריקל צווישן בײדע הענט. איז דער שטריקל ניט שטײף אנגעצויגן, דאן קען מען אים דרײען צווישן די צוויי פונקטן זײנע, וואס מיר האַלטן אין אונזערע הענט, אזוי, אז דער שטריקל וועט בײם דרײען אננעמען אלע מאל אן אנדער לאגע אין רוים: אײנמאל וועט ער אויסקומען אויסגעבויגט אויף אַראָפּ, דעם צווייטן מאל—אויף אַרויף. (זעה פיג. 4.) וואס שטײפער מיר וועלן

פיג. 4.

אנציהען דעם שטריקל צווישן די הענט, אלין ווייניגער וועט מען קענען באמערקן א ענדערונג אין זיין לאגע בשעת דעם דרייען. אט אין דעם ווי מעגלאך שטייף אנגעצויגענעם צושטאנד בילדעט דער שטריקל א גראדע ליניע.

דערקלערונג: א ליניע, וואס ענדערט ניט איר לאגע ביים דרייען זי ארום צוויי פון אירע פונקטן איז א גראדע ליניע.

פראקטיש באנוצן מיר דעם קאנט פון א גוטער ווירע אלס א גראדע ליניע צום צייכענען, ליניר: א. ד. ג. סטאליארעס, ווען זיי ווילן ציהען זייער א לאנגע גראדע ליניע אויף א ברעט, רייבן אן א פאדים מיט קויל אדער קרייד, ציהען אים אן זייער שטייף צווישן צוויי פונקטן און פיקן אן מיטן פאדים איבער דער ברעט: אויפן ברעט בלייבט אנגעמערקט מיט ווייס אדער שווארץ א ליניע, וועלכע איז מער אדער ווייניגער אן אמתע גראדע ליניע. אלע אנגעצייכנטע גראדע ליניעס גיסן זיך צונויף ביים ארויפלייגן זיי איינע אויף דער אנדערער, אזוי אז זייערע פונקטן דעקן זיך.

11. וואלטן מיר געוואלט צונויפלייגן דעם גראדן קאנט פון א ווירע (א גראדע ליניע) מיטן רונדן קאנט פון קאנוס, וואלטן מיר עס בשום אופן ניט געקענט מאכן. מיט די קאנטן פון קוב וועט זיך די גראדע ווירע יע צונויפלייגן. די קאנטן פון קוב זיינען גראדע ליניעס, דער קאנט פון קאנוס—ניט. דער קאנט פון קאנוס איז א קרומע ליניע.

דערקלערונג: א ליניע, וואס קיין שום טייל פון איר לייגט זיך ניט צונויף מיט א גראדער ליניע, הייסט קרומע ליניע.

12. **די פלאטפלעכע אדער פלאטע.** לאמיר איצט פארגלייכן די פלעכעס פון קויק, קוב און קאנוס. ארויפלייגנדיג דעם גראדן קאנט פון ווירע (די גראדע ליניע) אויף וועלכער עס איז ווענטל פון קוב, וועלן מיר זיך איבערצייגן, אז דער קאנט פון ווירע לייגט זיך אויס אויף דער ווענטל פון קוב אזוי, אז צווישן בלייבט ניט קיין שפארונע. אין וועלכער לאגע מיר זאלן ניט לייגן די ווירע אויפן וועגטל פון קוב וועט זיין דאס זעלבע. ביים ארויפלייגן די ווירע איף דער זייט פלעכע פון קאנוס, וועט דאס זעלבע פארקומען נאר ביי א באשטימטער לאגע פון דער ווירע: ווען זי ציהט זיך צווישן שפיצפונקט פון קאנוס און וועלכן עס איז ארט פון רונדן קאנט. אין אנדערע לאגעס פון דער ווירע אויפן קאנוס וועט עס ניט זיין. אויפן קויק לאזט זיך די גראדע ווירע אין קיין שום לאגע ניט צונויפלייגן מיט זיין פלעכע. נאר אין איין פונקט וועט די ווירע באריהרן דעם קויק און

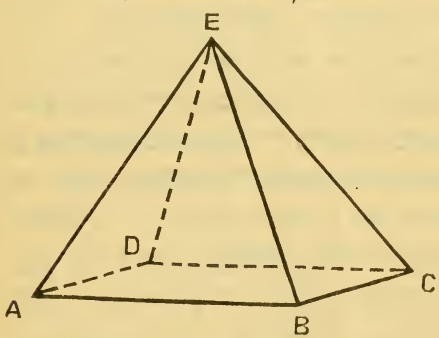
ניט מער. די פּלעכעס פון די ווענטלאַך פון קוב זיינען פלאַטשיגע פלעכעס, די פלעכעס פון קאָנוס און קויק—ניט.

באַשטימונג: אַ פּלעכע, אויף וועלכער אַ גראַדע ליניע לייגט זיך אויס מיט אַלע אירע פּונקטן, ביי אַלע אירע לאַגעס אויף דער פלעכע, הייסט פלאַטפלעכע, אדער פלאַטע.

13. **די קרומע פלעכע.** אויפן זעלבן אופן פּרובירט אויס דער בעל-מלאכה, צו אַ פלעכע איז פלאַטשיג, אדער ניט. אַרופלייגנ-דיג אויף איר אַן אייזערנע ווירע מיטן קאַנט אין עטלאַכע לאַגעס. ווען ביי וועלכער עס איז לאַגע פון קאַנט אויף דער פלעכע, לאָזן זיך באַמערקן שפּאַלטן צווישן איר און דעם קאַנט, דאַן איז די פלעכע ניט קיין פלאַטע.

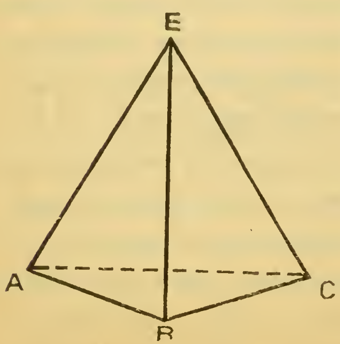
באַשטימונג: אַ פלעכע, וואָס איז ניט קיין פלאַטע, הייסט קרומע פלעכע אדער קרומפלעכע. ביים קאָנוס איז נאָר די פוספלעכע אַ פלאַטע.

14. **די פּיראַמידע. אַ קערפּער מיט אַזאַ פאָרם און געשטאַלט טראָגט דעם נאָמען פּיראַמידע.** (פיג. 5.)



פיג. 5.

אויף דער פּיראַמידע לאָזן זיך אנצייכן 8 קאַנטן (ליניעס) 5 ווענטלאַך (פלעכעס), 5 שפּיצן (פונקטן). די ווענטלאַך זיינען פלאַטפלעכעס, אָדער, קירצער געזאָגט, פלאַך. אין 4 פונקטן פון דער פּיראַמידע קומען זיך צונויף צו 3 קאַנטן (אָדער 3 ווענטלאַך). אין איין פונקט (וועלכן?) קומען זיך צונויף 4 קאַנטן (אָדער 4 ווענטלאַך).



פיג. 6.

15. **אָט דער קערפּער טראָגט דעם נאָמען דרייקאַנטיגע פּיראַמידע** (פיגור 6), ווייל זיין פוס-פלעכע פאַרמאָגט נאָר 3 קאַנטן AB, BC און AC בעת די פריהער באַטראַכטע פּיראַמידע פאַרמאַגט אַזעלכע פ י ר. דע-ריבער הייסט אויך די פריהערדיגע פּיראַמידע אָפטמאָל פ י ר ק אַ נ ט י ג ע פּיראַמידע צום אונטערשייד פון דער ד ר יי ק אַ נ ט י-

גער. עס קען אויך געבן פינפקאַנטיגע, זעקסקאַנטיגע פּיראַמידעס א. א. וו. לויט דער צאָל קאַנטן (ליניעס), וואָס די פוספּלעכע, די פוסווענטל פאַרמאָגט.

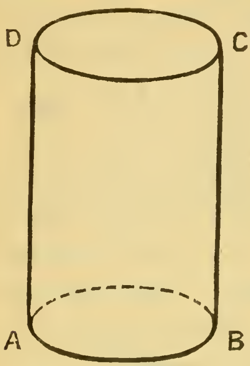
16. **דער ווינקל.** לאָמיר איצט באַטראַכטן ווי קומען זיך צונויף אין די שפּיצן די קאַנטן פון קוב, פון דער פירקאַנטיגער און פון דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע. די **ווענטלאַך** ABCD פון קוב און פון דער פירקאַנטיגער פּיראַמידע קען מען אַזוי צונויפלייגן אז די שפּיצן זאָלן זיך דעקן. ביים אַרויפלייגן די פוסווענטל ABC פון דער דרייקאַנטיגער פּי- ראַמידע אויף דעם פוסווענטל ABCD פון קוב אזוי, אז די ליניעס AB פון ביידע זאָלן זיך דעקן, וועלן מיר באַמערקן, אז די ליניעס BC וועלן זיך ניט דעקן. די ליניעס AB און BC פון קוב גייען זיך שטאַרקער פאַנאַנ- דער אַזוי, אז דער קאַנט BC פון דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע דעקט זיך ניט מיטן קאַנט BC פון קוב, אפילו ווען די ליניעס AB האָבן זיך יע גע- דעקט, און פאַרקערט. יעדער ווענטל פון דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע וועט דעקן א זייטיגע ווענטל פון דער פירקאַנטיגער אָבער ניט די פוסווענטל, ווייל ווידער אמאָל זיינען די קאַנטן, (די ליניעס), פון דער פוסווענטל פון דער פירקאַנטיגער פּיראַמידע אַנדערש געניייגט, אַנדערש געבויגט איינער צום אַנדערן, ווי די קאַנטן פון דער דרייקאַנטיגער.

באַשטימונג: די נייגונג פון צוויי גראַדע ליניעס איינער צו דער אַנדערער, וואָס גייען אַרויס פון איין פונקט, הייסט ווינקל. די ווינקלען פון די פוסווענטלאַך פון קוב און פון דער פיר- קאַנטיגער פּיראַמידע דעקן זיך, זיי זיינען גלייך צווישן זיך ד. ה. די קאַנטן האָבן די זעלבע נייגונג צווישן זיך. די ווינקלען פון קוב און פון דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע דעקן זיך ניט, שטימען ניט איין, זיינען ניט גלייך. די קאַנטן פון דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע זיינען אַנדערש גענייגט איינער צום אַנדערן ווי די קאַנטן פון קוב. די ווינקלען אויפן קוב זיינען גרע- סער פון די ווינקלען אויף דער דרייקאַנטיגער פּיראַמידע.

17. **דער צילענדער. א קערפּער מיט אַט אַזאַ פאָרם און געשטאַלט הייסט צילענדער.** (פיג. 7.) זיין דעקל פון אויבן און די פוסווענטל פון אונטן זיינען ענלעך צו דער פוסווענטל פון קאַנוס—זיי זיינען פלאַך און רונד. ביידע רונדע קאַנטן פון צילענדער לייגן זיך צונויף מיטן רונדן קאַנט פון קאַנוס. אַזאַ פאָרם באַמערקן מיר ביי זיילן; מטבעות אַרויפגעלייגט איינע אויף דער אַנדערער, בילדן אויך א צילענדער איינגעטלאַך איז יעדער איינצלנע מטבע אויך א צילענדער, אמת זייער א

נידעריגער. די זייטפלעכע פון צילענדער איז ניט פלאַך, זי איז אַ קרומפלעכע

18. באַטראַכטנדיג די באַהאַנדלטע קערפּער אַלע צוזאַמען, קענען מיר זיך איבערצייַגן אין דער פאַרשיידנאַרטיגקייט פון פאָרם און געשטאַלט, וועלכע קערפּער קענען האָבן. יעדערער קען אָנרופן נאָך פאָרמעס (למשל, אן איי, אַן אוגערקע, אַ לינז). די פאָרמעס וועלכע מיר האָבן באַטראַכט זייַנען די איינפאַכסטע, וואָס מיר טרעפן אַרום זיך. וואָס אָנבאַלאַנגט דער אויבערפלעכע פון די קערפּער, קען זי זייַן, ווי מיר האָבן געזעהן, גאַנץ פאַרשייַדן לויט דער צאָל פון אירע טייַלן, פון אירע פלעכעס:



פיג. 7.

די אויבערפלעכע קען בילדן איין גאַנצע פלעכע (קויק, איי) צוויי—(קאָנוס, לינז) דריי— (צילענדער, אָבגעהאַקטער קאָנוס) פיר—(דרייַקאַנטיגע פיראַמידע) פינף—(פירקאַנטיגע פיראַמידע), זעקס—(קוב) א. א. וו. אן אַ סוף. די פלעכעס קענען זייַן פלאַטע און קרומע, די ליניעס—גראַדע און קרומע. אין די ערטער, וואו צוויי פלעכעס קומען זיך צונויף, ציהען זיך ליניעס, ליניעס טרעפן זיך צוזאַמען אין פונקטן א. א. וו.

אַ קערפּער, אַ פלעכע, אַ ליניע, אַ פונקט—הייסן פיגורן.

זייער אָפּבילדונג אויפן פּאַפּיר טראָגט דעמזעלבן נאָמען. אַ זאַמלונג פון פונקטן, ליניעס, פלעכעס, קערפּערס, איינציגווייז אָדער צוזאַמען, בילדן אויך פיגורן, וועלכע הייסן צוזאַמענגעזעצטע פיגורן.

19. די אנטשטייאונג פון אַ ליניע, פלעכע, און קערפּער קענען מיר זיך נאָך פאָרשטעלן דורך באַוועגונג.

דעם פונקט קענען מיר דורך באַוועגונג ניט בילדן. דער פונקט באַצייכנט אן אָרט, אַ לאַגע אין רוים. ווען די לאַגע ענדערט זיך, זאָגן מיר: דער פונקט באַוועגט זיך. ווען מיר זיך פאָרשטעלן דעם וועג, וואָס דער פונקט מאַכט דורך בעת דער באַוועגונג, דאַן וועלן מיר באַקומען א ליניע. באַוועגט מען, למשל, דעם שפּיץ פון אַ גליהענדיגער שוועבעלע געשווינד אין אַ פינסטערן רוים, באַקומט מען דעם בילד פון א ליניע, וועלכע קען גילטן פאַר אַן אמתע געאָמעטרישע ליניע. באַוועגט מען דעם שפּיץ פון בלייַשטיפט (א ממשותדיגער פונקט!) איבערן פּאַפּיר, באַקומען מיר אויך אַ ליניע, אָבער ניט קיין געאָמעטרישע, ווייַל אַזאַ ליניע פאַרמאָגט שוין אַ געוויסע דיקקייט וואָס אַן עכטע געאָמעטרישע ליניע דאַרף ניט האָבן, ווייַל זי איז בלויז אַ פאָרשטעלונג. אָבער ניט עפּעס ממשותדיגעס.

א ליניע איז די שפור פון א באוועגלאכן פונקט. יעדער איינצלנער אָרט אויף דער ליניע קען באטראכט ווערן אלס א פונקט.

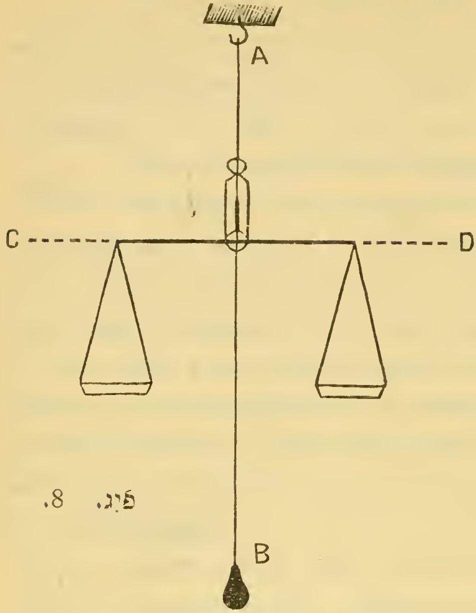
20. די ליניע קענען מיר זיך אויך פאָרשטעלן אין באוועגונג. די באוועגונג פון דער ליניע קען פאָרקומען אזוי, אז די שפור זאל זיין אויך א ליניע, (למשל, דער פליה פון א פייל פון בויגן,) אָדער א פלעכע. א פלעקל, וואָס שטעקט אין דער ערד און ווערט געדרייט ארום דעם אריינגעשטעקטן שפיץ, מאכט אין דער ערד א גריבל, וואָס איז ענלאך צו א קאָנוס, וואָס שטייט מיטן שפיץ אראָפּ. דער קאנט פון פלעקל (די ליניע) האָט ביי דער באוועגונג (ביים דרייען) געבילדעט די פלעכע (פון קאנוס).

21. **א פלעכע איז די שפור פון א באוועגלאכער ליניע.** א פלעכע קען מען זיך אויך פאָרשטעלן אין באוועגונג. זייער א דינער פאפיר קען אונז געבען אן אומגיפערן בילד פון א פלאטע. באוועגט זיך די פלאטע אין איר אייגענער פלעכע (למשל דער פאפיר אויפן טיש) דאן בילדעט זי ניט קיין שום נייע פיגור. קומט די באוועגונג פאָר ניט אין איר אייגענער פלעכע, דאן בילדעט זי א נייע פיגור — א קערפער. א מטבע געשארט איבערן טיש, שאפט ניט קיין נייע פיגור מיט איר פלעכע; ווען מיר אָבער דיזעלבע מטבע אוועקשטעלן אויפן קאנט און דרייען (ניט קייקלען!) ארום דעם קאנט, דאן וועט איר פלעכע בילדן מיט אירע לאגעס א קויק, וועלכן מיר זעהען כמעט מיטן אויג. **א קערפער איז א טייל פון רוים, וואס א באוועגלאכע פלעכע נעמט ארום.**

.II

לאָמיר נאָך א מאָל באטראכטן עטלאכע פון די באהאנדלטע קערפער און זייערע טיילן, כדי זיך קלאָר מאכן נייע באגריפן און נייע אייגנשאפטן פון די פיגורן.

22. בשעת דער קוב שטייט אויפן טיש, נעמען זיינע קאנטן איין אזעלכע ספעציעלע לאגעס אין רוים, מיט וועלכע מיר ווען זיך אָפט שפעטער באגעגענען. פיר קאנטן ציהען זיך פון אויבן אראָפּ. א געוויכטל צוגעבונדן צו א פריי הייננענדיגן פאָדים ציהט אויס דעם פאָדים אזוי, אז בשעת דער פאָדים איז אומבאוועגלאך, פארנעמט ער אויך אזא לאגע אין רוים, וואָס ארום אונז. א שטיינדל, וואָס פאלט פריי ארויס (אָן א שליידער) פון האנט באוועגט



פיג. 8.

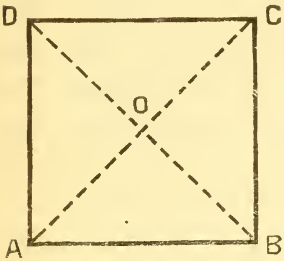
זיך אזוי, אז די שפור פון זיין וועג איז א ליניע מיט אזא לאגע. **א גראדע ליניע, וואס איז אין דערזעלבער לאגע ווי די שפור פון וועג פון א פריי פאלנדיגן קערפער הייסט פאלגראדע ליניע**, אדער אויף לאטייניש **ווערטיקאלע ליניע**, פון ווארט ווערטעקס, וואס באדייט שפיטל, ווייל די געדאכטע ליניע, וואס מען קען ציהען אין אונזער קערפער פון די פיס ביז צום שפיץ קאפ (שייטל), פארנעמט אויך אזא לאגע, בשעת מיר שטייען שלאנק אויסגעצויגן (זעה פיג. 8 די גראדע AB)

23. נאך א ספעציעלע לאגע פון א גראדער ליניע באמערקן מיר אין דער לאגע פון די אקסלען פון א פינקטלאכער וואג, ווען ביידע טעלערס זיינען גלייך באלאדן. די געדאכטע ליניע אויפן פרייען פעלד, וואו די ערד מיטן הימל גיסן זיך צונויף, האט דיזעלבע לאגע. אט די געדאכטע ליניע אויפן פעלד הייסט האריזאנט.

א גראדע ליניע, וואס נעמט איין די לאגע ווי די אקסלען פון א ניט געלאדענער וואג הייסט וואגראדע אדער האריזאנטאלע ליניע. (זעה פיג. 8 די גראדע CD) אכט קאנטן פון שטייענדיגן קוב (צו צוויי פון פארנט און פון הינטן און צו צוויי פון די זייטן) נעמען איין א האריזאנטאלע לאגע. פלאטעס קענען אויך ליגן האריזאנטאל אדער וואגראד, (ווי למשל די אויבערשטע און אונטערשטע ווענטלאך פון קוב) און ווערטיקאל אדער פאלגראד (ווי די איבעריגע פיר ווענטלאך פון קוב).

24. ווען א פאלגראדע מיט א וואגראדער גייען ארויס פון איין פונקט (למשל ביים צינגל פון דער וואג אויף דער פיג. 8) בילדן זיי צווישן זיך א נייגונג, א ווינקל (16), וועלכער האט אויך א ספעציעלן נאמען. אזא ווינקל הייסט א רעכטער ווינקל אדער רעכט-

ווינקל. די ווינקלען פון קוב זיינען אלע רעכטווינקלען, אויף דער פיר־קאנטיגער פיראמידע געפינען מיר אויך עטלאכע רעכטווינקלען (וואו?) אויף דער דרייקאנטיגער פיראמידע, וואס מיר האבן באטראכט, זיינען אזעלכע ווינ־קלען ניטא.



פיג. 9.

25. לאמיר ארומצייכנען מיט בליישטיפט וועלכן עס איז דעקל פון קוב, ארויפ־לייגנדיג אים אויפן פאפיר. מיר באקומען אויך א פיגור (פיג. 9), וועלכע באשטייט פון ליניעס, פונקטן. לאמיר אויספארשן די אייגנשאפטן פון דער פיגור מיט א מאס. לאמיר אנהויבן פון וועלכן עס איז פונקט, למשל פונקט A. וואס קען מען מעסטן אין פונקט? גארניט. דער פונקט A באצייכנט נאר א לאגע אויפן פאפיר, אן ארט. **דער פונקט האט ניט קיין אויסמעסטונג.**

26. לאמיר זיך פארשטעלן, אז דער פונקט A באוועגט זיך (20) ביז ער קומט אין דער לאגע B, דאן וועט די גראדע AB זיין די שפור פון דער באוועגונג. וואס לאזט זיך דא מעסטן? דא לאזט זיך מעסטן ווי ווייט דער פונקט איז אוועק פון זיין פריהערדיגע לאגע A ביז דער לאגע B. די ווייטקייט רופן מיר אן די ליינג פון דער גראדער AB. קען מען נאך מעסטן די דיקקייט פון דער גראדער AB? געאמעטריש ניט, ווייל א ליניע האט ניט קיין דיקקייט. פראקטיש ווערט די גרעב פון א ליניע אויך ניט גענומען אין אכט. **די ליניע האט איין אויסמעסטונג — די ליינג.**

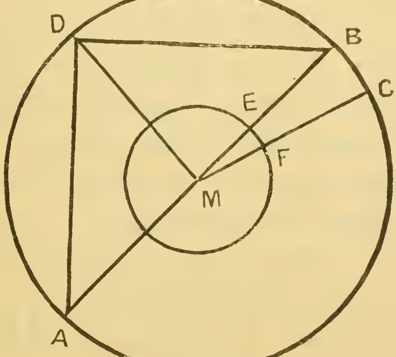
27. וועט זיך איצט די גראדע AB באוועגן ביז זי וועט קומען אין דער לאגע DC וועט זיך דערביי בילדן א פלעכע (21). די גרויס פון דער פלעכע, דער שטח אירער, הייננט אפ ערשטנס פון דער ליינג פון דער גראדער אליין און צווייטנס פון דעם, ווי ווייט זי איז אפגעגאנגען פון דער לאגע AB ביז דער לאגע CD. אט די ווייטקייט הייסט די ברייט פון דער פלעכע ABCD.

א פלעכע האט צוויי אויסמעסטונגען: די ליינג און די ברייט.

28. וועט זיך די פלעכע ABCD באוועגן ביז זי וועט קומען אין דער לאגע EFGH (זעה פיג. 2) וועט זי בילדן א קערפער, דעם קוב (22), וועל־כער פארנעמט שוין א באשטימטן טייל פון רוים. אט דער טייל פון רוים ווערט אויך געמאסטן און הייסט פארנעם. דער פארנעם הייננט אפ פון שטח

ABCD און פון דעם, ווי זוײַט די פלעכע ABCD איז אָפּגעגאנגען פון איר ערשטער לאגע ביז דער צווייטער. די ווײַטקײַט הײַסט די הויך פון קערפּער (אָדער די טיף, ווען די פלעכע באוועגט זיך אויף אראָפּ לויט אונזער פאָרשטעלונג). דערפון שליסן מיר: **אַ קערפּער האט דרײַ אויסמעסטונגען: די לײַנג, די ברײַט און די הויך.**

.29 לאָמיר זיך צוריקקערן צו דער פיג. 9. ווי ווען מיר מעסטן די לײַנג פון אירע ליניעס? די ליניעס, ווי מיר זעהען, זײַנען אָפּגעהאקט פון בײַדע זײַטן דורך פונקטן. אַזעלכע אפּגעהאַקטע טיילן פון אַ גראַדער ליניע הייסן שטרעקעס. בײַם מעסטן די שטרעקעס, ווײַלן מיר אויס אן אנדער שטרעקע אלס מאָס, וועלכע קען האָבן אַ באליביגע לײַנג (אַרשין, פוס, מעטער א. ז. ג.) און מיר לײַגן זי פּשוט צו צו אונזער שטרעקע. ווען דערביי די ענדעפונקטן פון בײדע שטרעקעס ריכטיג צוזאמענפאלן, דאן הייסן זיי גלייך, ווען ניט, דאן הײַסט יענע שטרעקע קלענער, וועמענס ענדעפונקטן עס לײַגן זיך אויס צווישן די ענדעפונקטן פון דער צווײַטער. אַ קרומע ליניע לאָזט זיך מיט אַ גראָדער שטרעקע נישט מעסטן, ווײַל זי לײַגט זיך ניט צונויף מיט איר: דאָך קענען מיר איר לײַנג אויך באַשטימען אויף אן אַנדער אופן, וועגן וועלכן מיר וועלן רײַדן שפּעטער. די שטרעקעס פון אונזער פיגור 9 זײַנען צווישן זיך אַלע גלײַך. מיר קענען זיך נאָך איבערצײַגן אין אַזאַ אײַנגנשאַפט פון דער פיגור: די אנגעצײַכנטע שטרעקעס AC און DB זײַנען אויך גלייך צווישן זיך, און ווערן געשניטן איינע דורך דער צווייטער אויף דער העלפט. בײַם אומקנייטשן די פיגור 9 אַרום דער גראַדער AC אָדער DB וועלן בײדע טײַלן ריכטיג דעקן אײנער דעם אַנדערן. די פיגור 9 הײַסט קוואַדראַט.



פיג. 10.

.30 **דער קרײַז און אומקרײַז.** ארומצײַכענענדיג מיטן בליישטיפט וועלכן עס איז דעקעלע פון קאנוס, אדער פון צילינדער, וועלן מיר באקומען א פיגור, וועלכע איז אלעמען באקאנט מיטן נאמען קרייז. די קרומע געשלאסענע ליניע, וואס באגרעניצט דעם קרײַז הײַסט אומקרײַז אויף דער פיגור 10 זעהען מיר 2

קרייזן, איינעם אין דעם אנדערן. אן אומקרייז ווערט געצייכנט מיט אן אינסטרומענט, וואס איז באקאנט מיטן נאמען צירקל. די שפיציגע פיסל פון צירקל ווערט איינגעשטעלט אין איין פונקט (M) און די צווייטע פיסל מיטן בליישטיפט ווערט געדרייט ארום דעם איינגעשטעלטן פונקט, ביז די געצייכנטע ליניע, דער אומקרייז, שליסט זיך. שוין פון דעם צייכענען זעהען מיר ארוים אן אייגנשאפט פון אומקרייז: יעדער ארט פון אים, יעדער פונקט זיינער שטייט אפ גלייך וויט פון דעם איינגעשטעלטן פונקט, מיטלפונקט הייסט ער, אדער צענטער, ווייל די פיסלאך פון צירקל בלייבן מיטן זעלבן אויפטאך ביים צייכענען דעם גאנצן אומקרייז. א וועלכע עס איז גראדע, וואס פארבינדט וואס פאר עס איז פונקט (למשל B פון אומקרייז מיטן מיטלפונקט M הייסט שטראל אדער ראדיוס. MB איז א ראדיוס פון גרויסן קרייז, ME—פון קליינעם, פון אינעווייניגסטן. די ערשט אויבן באוויזענע אייגנשאפט פון אומקרייז קען מען נאך ארויסזאגן אזוי: אלע ראדיוסן פון קרייז זיינען גלייך צווישן זיך. א גראדע (DB—פיגור 10), וואס ציהט זיך צווישן צוויי פונקטן (D און B) פון אומקרייז, הייסט סטרונע. א סטרונע, וואס גייט דורכן מיטלפונקט, הייסט דורכמעסטער אדער דיאמעטער. דער דיאמעטער באשטייט פון צוויי ראדיוסן. מען קען ציהען אין קרייז דיאמעטערס אן א סוף לויט זייער צאל. ביים אומקנייטשן דעם קרייז ארום וועלכן עס איז דיאמעטער וועלן ביידע העלפטן ריכטיג דעקן איינע דער אנדערער. אז מיר וועלן פארבינדן וועלכע עס איז צוויי פונקטן (B און C פיג. 10) פון אומקרייז מיטן צענטער, וועלן מיר באקומען א ווינקל צווישן די צוויי אנטשטאנענע ראדיוסן (16). צווישן די פונקטן B און C ליגט א טייל פון אומקרייז—א בויגן הייסט עס—א שטיק פון א קרומער ליניע. וואס גרעסער עס קומט אויס דער בויגן, אלץ גרעסער קומט אויס דער ווינקל צווישן די ראדיוסן, וואס פארבינדן דעם מיטלפונקט מיט די ענדפונקטן פון בויגן. אזוי זעהען מיר אויף דער פיגור 10, אז דער ווינקל צווישן די שטראלן MD און MB איז גרעסער פון ווינקל צווישן די שטראלן MB און MC, פשוט, ווייל דער בויגן DB איז גרעסער פון בייגן BC. וואלטן די בויגנס געווען גלייך, וואלטן די ווינקלען אויך געווען גלייך, ד. ה. מיר וואלטן זיי געקענט ארויפלייגן איינעם אויפן אנדערן און זיי וואלטן זיך ריכטיג געדעקט.

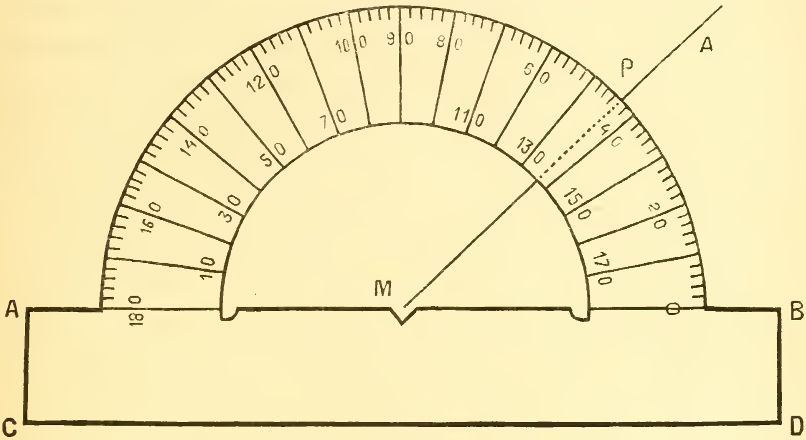
31. **ווינקלמעסטונג.** אט די אפהייניגקייט פון ווינקל אין קרייז פון זיין בויגן, אט די נעבונדנקייט זייערע איינעם מיטן אנדערן, גיט אונז די מעגלאכקייט צו מעסטן א ווינקל, ד. ה. אויסצוארבעטן א מאס פאר

ווינקלען און פאַרגלייכן מיט איר אַלע ווינקלען. אַמבעסטן וועלן מיר קענען
באַטראַכטן ווי עס ענדערט זיך אַ בויגן מיט זיין ווינקל אויף אַ געוועהנלאַכן
טאַשנזייגער. לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אַז די צוויי וויזערס זיינען גראָדע ליניעס,
וועלכע גייען אַרויס פון איין פונקט (דעם צענטער פון ציפערבלאַט) און
ענדערן אַלע מאָל די נייגונג פון איינער צו דער אַנדערער, ד. ה. דעם ווינקל
(16) צווישן זיי. פונקט צוועלף דעם זייגער זיינען ביידע וויזערס צונויפגע-
לייגט. דערנאָך הויבט-אָן דער מינוטנווייזער אָפּצוטרעטן, דרייענדיג זיך ארום
צענטער. לאָמיר זיך פאָרשטעלן, אַז דער שעהנווייזער בלייבט אומבאַוועגלאַך.
אין אַ שעה אַרום וואָלט דער מינוטנווייזער ווידער פאַרדעקט דעם שעהנוויי-
זער, דורכמאַכנדיג אַלע מעגלאכע נייגונגען צווישן אים מיטן שעהנווייזער.
אָט דער גאַנצער ווינקל, אַלע דורכגעמאכטע נייגונגען,
הייסט פילער ווינקל. דער מינוטנווייזער האָט דורכגעמאַכט אַ פולן
ווינקל מיטן שעהנווייזער. כדי אים אויסצומעסטן, לאָמיר זיך פאָרשטעלן אַז
דער שפיץ פון מינוטנווייזער באַשרייבט די קרייזליניע מיט די שטריכן, וואָס
מיר זעהען אויפן ציפערבלאַט. עס איז קלאָר, אז ביי אַ דורכגעמאַכטן פולן
ווינקל, וועט באַשריבן ווערן אַ געשלאָסענער אומקריַיז. ווען מיר וועלן דעם
גאַנצן אומקרייז איינטיילן אין 360 גלייכע חלקים, אָנמערקן זיי מיט שטריכן אויפן
אומקרייז און ציהען פון מיטלפונקט שטראַלן צו די שטריכן, וועלן מיר באַקו-
מען 360 ווינקעלאַך צווישן די שטראַלן. דער ווינקעלע, וואָס וועט אויסקומען
צווישן צוויי שכנותדיגע שטראַלן, הייסט ווינקלגראַד און דינט אַלס מאָס
פון ווינקלען. א ווינקלגראַד איז א 360-סט חלק פון א פולן
ווינקל. די אומקרייזליניע וועט זיך דערביי אויך טיילן אויף 360 חלקים,
360 קליינע בויגנס. אָט דער קליינער בויגן, דער 360-סט חלק פון
דער אומקרייזליניע הייסט בויגנגראַד. וואָס גרעסער עס וועט
זיין דער וויזער (ד. ה. אייגנטלאַך דער ראדיוס) אַלץ לייגער וועט זיין דער
בויגנגראַד, דער ווינקלגראַד אבער בלייבט אומפאַרענדערט,
ווי דאס איז צו זעהן אויף דער פיג. 10. ביי איין און דעמזעלבן אומפאַר-
ענדערטן ווינקל צווישן די שטראַלן MB און MC איז דער בויגן BC גרע-
סער פון בויגן EF ווייל דער שטראל MB איז גרעסער פון שטראל ME.

32. דער טראַנספּאָרטער אָדער ווינקלמעסטער.

מעסטן אַ ווינקל, הייסט — געפינען וויפיל ווינקל-
גראַדן ער אנטהאלט. צום מעסטן ווינקלען באַנוצן מיר אַן
אינסטרומענט וועלכער הייסט טראַנספּאָרטער אדער ווינקלמעסטער. (פיג. 11.)
דאָס איז אַן האַלבער קרייז (פון בלעך אדער קאַרטאָן), וואו דער אומ-

קרײַז (די ליניע) איז אײַנגעטײלט אין 180 (360:2) גלײַכע חלקים (בויגנ־גראַדן), און וועלכער שטיצט זיך אויף אַ ווירעלע ABCD. דער מיטלפּונקט פון קרײַז קומט אוים אין דעם אײַנשניט M פון דער אַ ווירעלע. לאָמיר אויסמעסטן



פֿיג. 11.

דעם ווינקל צווישן די גראָדע MB און MA, וועלכע גייען אַרויס פון פּונקט M. דערצו לייגן מיר אַרויף דעם ווינקלמעסטער אויפן פּאַפּיר אַזוי, אַז דער קאַנט MB פון דער ווירעלע זאָל זיך צונויפפאַלן מיט דער גראַדער MB (אָדער MA) און דער פּונקט M פון ווינקל זאָל אויסקומען אין דעם אײַנשניט פון ווירעלע. דאַן ווערט די צווייטע גראָדע פון ווינקל אַרויסטרעטן פון אונטערן ווינקלמעסטער בײַ וועלכן עס איז שטריך. מיר לעזן איבער די צאָל וואָס שטייט בײַם שטריך, און דאָס איז די צאָל גראַדן, וואָס דער ווינקל צווישן די גראָדע MB און MA פאַרמאָגט. מײַסטנטײלס ווערן אָנגעמערקט די צאָל גראַדן איבער יעדערע צען, כּדי עס זאָל קלעקן אָרט פאַר די געדרוקטע ציפער.

33. צייכענען אַ ווינקל. ווילן מיר אָנצייכענען צוויי גראָדע מיט אַ געוואונשענער נייגונג צווישן זיי, אָדער ווי מ'זאָגט: אָנצייכענען אַ ווינקל, דאַן ציהען מיר אַ גראָדע, למשל AB (פֿיג. 11), ווײַלן אויס אויף איר אַ פּונקט M, שטעלן אײַן דעם ווינקלמעסטער אַזוי, אַז דער קאַנט AB פון זײַן ווירעלע זאָל זיך צונויפפאַלן מיט דער גראַדער און דער אײַנשניט זאָל אויסקומען בײַם פּונקט M. דערנאָך גייען מיר מיטן רונדן קאַנט פון ווינקלמעסטער ביזן געוואונטשענעם גראַד, למשל ביזן 43־סטן, בײַם שטריך פון 43־סטן גראַד מערקן מיר אָן אַ פּונקט P, נעמען אַוועק דעם ווינקלמעסטער און ציהען אַ גראָדע צווישן P און M. די גראָדע MB און MP זײַנען גע־נייגט איינע צו דער אַנדערער אויף 43 גראַד, דער ווינקל צווישן זיי אַנט־

.34 האלט 43 גראד.

מינוטע, סעקונדע וואו עס פאדערט זיך נאך א פיינערע אויס־מעסטונג ווי אין גראדן, ווערט דער בויגנגראד—(און במילא אויך דער ווינקלגראד) איינגעטיילט אין 60 קלענערע חלקים, וועלכע הייסן מינוטן. דער בויגנגראד אנטהאלט 60 בויגנמינוטן, דער ווינקלגראד — 60 ווינקלמינוטן. ביי זייער א גרויסן אומקרייז, (למשל ביים מעסטן די ערד) קען אויסקומען, אז די בויגנמינוט וועט זיין זייער לאנג. און איר וועלן זיך קענען אייסלייגן נאך קלענערע בויגנס. צו די ענדעפינקטן פון אט די קלענערע בויגנס וועלן זיך ציהען ראדיוסן, צווישן זיי וועט אויף אזא אופן אויסקומען א ווינקל נאך קלענער ווי א ווינקלמינוט. הייסט עס די ווינקלמינוט קען מען אויך ווייטער טיילן. א 60־סטע חלק פון דער בויגנמינוט הייסט בויגנסעקונדע א 60־סטע חלק פון דער ווינקלמינוט — ווינקלסעקונדע. שריפטלאך באצייכנט מען א גראד מיט א נול, א מינוט מיט איין קאמע, א סעקונדע —מיט צוויי קאמעס אויבן רעכטס ביי דער צאל, למשל $40°30'15''$ הייסט: 40 גראד 30 מינוט מיט 15 סעקונדעס.

ארום דעם צענטער פון זייגער קען מען, הייסט עס, אויסלייגן 360 ווינקלען צו $1°$ (גראד) יעדערער, אדער 360 מאל 60 ד. ה. 21600 קלענערע ווינקלען צו $1'$ (מינוט) יעדערער, אדער 360 מאל 60 מאל 60 ד. ה 1296000 נאך קלענערע ווינקלען צו $1''$ (סעקונדע) יעדערער. די טיילונג קען גיין אייגנטלאך נאך ווייטער אן א סוף...

III

,35 **גרויסן.** די לענג פון א ליניע, דער שטח פון א פלעכע, דער פארנעם פון א קערפער, די נייגונג פון צוויי גראדע ד. ה. דער ווינקל—דאס אלין זיינען אייגנשאפטן פון פיגורן, וועלכע קענען זיין ביי איין פיגור אין א קלענערער אדער א גרעסערער מאס, ווי ביי דער צווייטער. געגנשטאנדן איבערהויפט פארמאגן אייגנשאפטן, וועלכע קענען זיין ביי איינעם אין א קלענערער מאס ווי ביים אנדערן, למשל, די ווארימקייט פון א קערפער, זיין שווערקייט וכדומה. אזא אייגנשאפט, וועלכע קען זיין ביי איין געגנשטאנד, מער ווי ביים צווייטן הייסט א גרויס. נישט אלע אייגנשאפטן קענען אבער געמאסטן ווערן; למשל די רויטקייט פון

אַ פֿאַרב: זי קען זײַן מער אָדער װײניגער, אָבער מעסטן קען מען עס דערװײל ניט. הײסט עס, אַז ניט אַלע גרויסן זײַנען מעסטבאַר. מעסטבאַרע גרויסן הײסן מאַטעמאַטישע גרויסן, װײַל זײ װערן באַהאַנדלט אין דער מאַטעמאַטיק, דער װיסנשאַפֿט װעגן גרויסן. מאַטעמאַטישע גרויסן קענען אויך פֿאַרגלײַכט װערן, ד. ה. מיר קענען אויסרעכענען מיט װיפֿיל מאָל אײן געגנשטאַנד פֿאַרמאָגט אַן אײגנשאַפֿט מער אָדער װײניגער, װי דער צװײטער, אָדער אויף װיפֿיל ער פֿאַרמאָגט זי מער אָדער װײניגער פֿון צװײטן, זעלבסטפֿאַרשטענדלאַך, אַז פֿאַרגלײַכן קען מען נאָר אײנאַרטיגע גרויסן. עס האָט ניט קײן שום זין צו פֿאַרגלײַכן די לײַנג פֿון אַ ליניע מיטן שטח פֿון אַ פֿלעכע, װײַל די לײַנג און דער שטח זײַנען פֿאַרשײדנאַרטיגע גרויסן.

.36 **זאַצן און גלײַכונגען.** דעם רעזולטאַט פֿון אונזער פֿאָרשן די אײגנשאַפֿטן פֿון פֿיגורן (װי איבערהויפּט פֿון געגנשטאַנדן) דורך מעסטן און פֿאַרגלײַכן דריקן מיר אויס מינדלאַך (אָדער שריפֿטלאַך) אין װערטער אָדער מאַטעמאַטישע זאַצן, װאו די גרויסן װערן באַצײַכנט דורך סימנים, מײַסטנטײלס, אותיות פֿון לאַטײַנישן אלף־בית, װאָס װערן באַנוצט אַנשטאָט די גרויסן. לאָמיר נעמען למשל אַ מונדלאַכן זאַץ: די געשװינדקײַט פֿון אַ קערפּער, װאָס באַװעגט זיך, איז גלײַך דער שטרעקע, װעלכע ער מאַכט דורך, געטײלט אויף דער צײַט, בעת װעלכער ער באַװעגט זיך; באַצײַכנענדיג די שטרעקע מיטן אות s, די צײַט מיטן אות—t, די געשװינדקײַט—v, שרײַבן מיר דאָסזעלבע אָן אין אַזאַ מאַטעמאַטישן זאַץ: (לײען פֿון לינקס אויף רעכטס)

$$v = s : t$$

אַזאַ מאַטעמאַטישער זאַץ הײסט **גלײַכונג**, װײַל דאָ שטײט דער סימן פֿון גלײַכקײַט (=). װאו עס איז קײן גלײַכקײַט צװישן די גרויסן ניטאָ, אָדער ניט אָנגעגעבן, שרײַבן מיר אָן אַן אומגלײַכקײַט, באַנוצנדיג דעם סימן „<“, מיטן שפּיץ צו דער קלענערער גרויס. למשל:

"3 איז גרעסער פֿון 2„, שרײַבן מיר אַזוי: $2 > 3$, אָדער $2 < 3$

.37 **שבֿלדיגער פֿאָרשן.** די זאַצן און גלײַכונגען דריקן אויס פֿאַרשײדענע אײגנשאַפֿטן פֿון געגנשטאַנדן בכלל און פֿון פֿיגורן בפֿרט. אַ סך אײגנשאַפֿטן קענען מיר געפֿינען שוין באַטראַכטנדיג די פֿיגורן מיטן אויג, למשל: די אַרט פֿון דער פֿלעכע, די צאָל שפּיצן א. ד. גל. אַנדערע אײגנשאַפֿטן קענען מיר אַנטדעקן ערשט נאָכן מעסטן אָדער פֿאַרגלײַכן די פֿיגורן. אָבער ניט שטענדיג קענען מיר זיך פֿאַרלאָזן אויף אונזער אויג, װעלכער קען אונז פֿאַרפֿירן, און ניט צו יעדער פֿיגור

קענען מיר צוטרעטן מיטן מאס צו דער האנט: מיר וויסן, למשל, ניט אומ־שטאנד צו מעסטן מיט א מעסטיטרינגער מאס די ווייטקייט צווישן דער ערד און דער זון און דאך ווייסן מיר עס אזוי גענוי, ווי עס איז נאר מעגלאך. ווי אזוי? ווייל מיר רעכענען עס אויס, שטיצנדיג זיך אויף די איינגנשאפטן פון מעסטבארע קליינע פיגורן און ארויסדרינגענדיג איין איינגנשאפט פון דער צווייטער מיטן שכל הישר, וואס קען אונז פארבייטן די מאס אין האנט.

38. **די איינטיילונג פון זאץ: פאראויסבאדינגונג און פעסטשטעלונג.** יעדער זאץ, וואס זאגט ארויס א וועל־כע עס איז נייע איינגנשאפט, וועלכע מיר דרינגען ארויס מיט אונזער שכל פון א פיגור, באשטייט פון צוויי טיילן: דעם **פאראויסבאדינגונג** און דער **פעסטשטעלונג**. אין דעם פאראויסבאדינגונג ווערן אנגעוויזן די באדינגונגען, ד. ה. איינגנשאפטן, וועלכע די פיגור (אדער געגנשטאנד בכלל) דארף פארמאגן שוין פאראויס; אין דער פעסטשטעלונג ווערן אנגעוויזן נייע איינגנשאפטן, וועלכע מיר דרינגען ארויס פון די פאראויסגעגעבענע. די **געדאנקען** (אויך מינדלאכע אדער שריפטלאכע זאצן), **וועלכע אי־בערצייגן אונז**, אז די פעסטשטעלונג איז ריכטיג, **הייסן באווייז.** לאמיר נעמען, למשל, אזא אריפמעטישן זאץ: טיילט זיך די קווערסומע (די סומע פון די ציפער) פון א צאל אויף 9, דאן טיילט זיך די צאל אליין אויף 9. אין דעם פאראויסבאדונג ווערט אנגעוויזן אן איינגנשאפט, וואס די צאל דארף פאראויס פארמאגן: איר קווערסומע דארף זיך טיילן אויף 9; ווייטער גייט די פעסטשטעלונג, וואס ווייזט אן אויף א נייע איינגנשאפט: די צאל אליין טיילט זיך אויף 9. דעם באווייז קען מען געפינען אין יעדער אריפמעטישן לערבוך.

39. **גלייכער און פארקערטער זאץ.** יעדער זאץ קען מען אומ־קערן, ד. ה. די פעסטשטעלונג נעמען אלס א פאראויסבאדונג און דעם פאראויסבאדונג אלס פעסטשטעלונג. לאמיר אומקערן דעם זאץ פון (38): טיילט זיך א צאל אויף 9, דאן טיילט זיך איר קווערסומע אויף 9. אזא זאץ, אין פארגלייך מיטן ערשטן (38), הייסט **פארקערטער זאץ**, דער ערשטער אליין הייסט **גלייכער זאץ.**

40. **פאזיטיווע און נעגאטיווע זאצן.** סיי דער גלייכער, סיי דער פארקערטער זאץ נעמען אן פאראויס אן איינגנשאפט און דרינ־גען ארויס דערפון א נייע. מען קען מאכן פון יעדערן פון זיי צו א נייעם זאץ, אפווארפנדיג אין פאראויסבאדונג דעם תנאי און אין דער פעסטשטע־לונג די איינגנשאפט. אזעלכע זאצן הייסן אין פארגלייך מיט די ערשטע צוויי **נעגאטיווע זאצן** (באניינענדיגע), די ערשטן צוויי (38, 39) הייסן

פּאָזיטיווע (פּאַיאָענדיגע). לאָמיר אויספּריקן די נעגאַטיווע זאַצן צו (38, 39): נעגאַטיוו—גלייכער זאַץ: טיילט זיך ניט די קוועַרסומע פון אַ צאל אויף 9, דאַן טיילט זיך ניט די צאָל אַליין אויף 9. נעגאַטיוו—פּאַרקערטער זאַץ: טיילט זיך ניט אַ צאָל אויף 9, דאַן טיילט זיך ניט איר קווערסומע אויף 9. אויף אַזאַ אופן קען מען פון יעדער זאַץ מאַכן נאָך 3: 1) אַ פּאַרקערטן זאַץ, 2) אַ נעגאַטיוו—גלייכן און 3) אַ נעגאַטיוו—פּאַרקערטן. די אַלע 3 זאַצן הייסן, אין פאַרגלייך מיטן ערשטן, **אָפּשטאַמענדיגע זאַצן.** עס איז קלאָר, אז מען קען דעם פּאַרקערטן זאַץ (סיי דעם פּאָזיטיוון, סיי דעם נעגאַטיוון) אָננעמען פאַר אַ גלייכן, דאַן וועט דער גלייכער ווערן דער פּאַרקערטער.

41. איינפאַכע און צוזאַמענגעזעצטע זאַצן. אויב אין דעם פאָראויסבאַדינג ווערט אָנגעוויזן ניט מער ווי איין תנאי און אין דער פעסטשטעלונג ניט מער ווי איין נייע איינגשאַפט, דאַן הייסט אַזאַ זאַץ אַן **איינפאַכער.** קומט פאָר אין דעם פאָראויסבאַדונג מער תנאים, אָדער אין דער פעסטשטעלונג מער נייע איינגנשאַפטן, אָדער ביידע זאַכן צוזאַמען, דאַן הייסט דער זאַץ אַ **צוזאַמענגעזעצטער.** אַ צוזאַמענגעזעצטער זאַץ קען האָבן עטלאַכע פּאַרקערטע זאַצן. לאָמיר למשל, אָנשרייבן אַ צוזאַמענגעזעצטן זאַץ מיט עטלאַכע זיינע פּאַרקערטע אָפּשטאַמענדיגע זאַצן: פּאָזיטיוו-גלייכער זאַץ: טיילט זיך די פולע צאָל און מינדערצאָל אויף 9, דאַן טיילט זיך דער רעשט אייך אויף 9; דאָס איז ריכטיג (45—27=18); פּאָזיטיוו-פּאַרקערטער 1): טיילט זיך דער רעשט אויף 9; דאַן טיילט זיך אויך די פולעצאָל און די מינדערצאָל אויף 9; דאָס איז נישט ריכטיג (18=5—23); פּאָזיטיו-פּאַרקערטער 2): טיילן זיך דער רעשט און די פולעצאָל אויף 9, דאַן טיילט זיך אויך די מינדערצאָל אויף 9 (ריכטיג) פּאָזיטיוו-פּאַרקערטער 3): טיילן זיך דער רעשט און די מינדערצאָל אויף 9, דאַן טיילט זיך די פולעצאָל אייך אויף 9 (ריכטיג). זעלבסט פאַרשטענדלאַך קען מען פון די 4 זאַצן מאַכן נאָך 4 נעגאַטיווע.

42. די ריכטיגקייט פון די זאַצן. וואָס אָנבאַלאַנגט דער ריכטיגקייט פון אַלע אָפּשטאַמענדיגע זאַצן ד. ה. צי פאַרמאָגן די פיגורן אין דער אמתן די איינגנשאַפטן, וועלכע דער פּאַרקערטער און ביידע נעגאַטיווע זאַצן זאָגן אַרויס, איז עס, בכלל גערעדט, אַן אומבאַשטימטע זאַך **אַ מאָל קענען זיי זיין ריכטיג און אַ מאָל ניט,** אפילו אויב דער גלייכער זאַץ אליין איז ריכטיג. נאָר ביי אַן איינפאַכן זאַץ (41) איז יעדער פון די 4 זאַצן (ביידע פּאָזיטיווע און ביידע נעגאַטיווע) אַזוי געבונדן מיט נאָך אַ צווייטן, אז ווען איינער פון זיי איז ריכטיג, איז דער

צוויטער אויך ריכטיג. וועלכער מיט וועלכן זיינען אזוי געבונדן? דער פּאָזיטיוו-גלייכער מיטן נעגאטיוו-פארקערטן און דער פּאָזיטיוו-פארקערטער מיטן נעגאטיוו-גלייכן: איז אן איינפאכער פּאָזיטיוו-גלייכער זאץ ריכטיג, דאן איז זיין אָפּשטאמענדיגער נעגאטיוו-פארקערטער אויך ריכטיג און פארקערט. דאָס זעלבע מיט די איבעריגע צוויי: דעם נעגאטיוו-גלייכן מיטן פּאָזיטיוו-פארקערטן. צום באווייז קען דינען יעדער איינפאכער זאץ. אין אַ צוזאמענגעזעצטן זאַץ איז אזא געבונדקייט, אזאַ אָפּהיינגיגקייט, אויך פאַרהאַן, אָבער ניט שטענדיג. מיט די געבונדנקייט שפּאָרט אונז איין דעם פאָרשן די ריכטיגקייט פון נעגאטיוו-פארקערטן זאץ, ווען די ריכטיגקייט פון פּאָזיטיוו-גלייכן איז שוין באוויזן, און פארקערט: מיר גייען בכיון פאָרשן די ריכטיגקייט פון נעגאטיוו-פאַרקערטן זאץ, ווען מיר קענען ניט באווייזן די ריכטיגקייט פון פּאָזיטיוו-גלייכן.

43. **באשטימונג, גרונדזאץ און לערזאץ.** דער באווייז (38) פון די זאצן שטיצט זיך אויף באשטימונגען און גרונדזאצן. **א באַשטימונג** דאס איז אזא זאץ, וועלכער גיט, אַזוי צו זאגן, **א נאמען דעם געגנשטאנד** אדער דער אייגנשאפט **אנווייזנדיג דערביי אלע סמנים**, וועלכע גייען ארונטער אונטער דעם נאמען למשל, די באשטימונג (2) זאגט אונז וואס מיר האבן צו פארשטיין אונטערן ווארט געאמעטרישער קערפּער. **א גרונדזאץ אדער אויף גריכיש — אקסיאָמע דאָס איז אזא זאץ וואס זיין ריכטיגקייט ווערט ניט באוויזן**, הן צוליב דעם, ווייל מיר קענען עס פּשוט ניט און מוזן עס אננעמען אן א באווייז, הן ווייל ער איז אזוי פארשטענדלאך, אז מיר געפינען ניט קיין לייכטערן זאץ צום באווייזן. אלע איבעריגע זאכן איבער די אייגנשאפטן פון פיגורן ווערן באוויזן, און הייסן **לערזאצן**, אדער אויף גריכיש **טעאָרעמעס**. זאצן וועלכע לאזן זיך לייכט ארויסדרינגען פון א לערזאץ, און לאנגן באווייז, הייסן **שלוסזאצן.**

44. **אט** ברענגען מיר דא א ריי גרונדזאצן (אקסיאמעס), וועלכע זיינען גילטיג אין דער גאנצער מאטעמאטיקע (35). שפּעטער וועלן מיר נאך האבן אקסיאמעס, וועלכע באהאנדלען ספּעציעל די אייגנשאפטן פון פיגורן דורך די לאטיינישע אותיות, וועלכע שטייען אין די גלייכונגען, זיינען באצייכנט גרויסן: לייניען, ווינקלען, צאלן סתם א. ד. גל. (די גלייכונגען און אומגלייכונגען לייענען פון לינקס אויף רעכטס).

45. **אַ גאַנצע גרויס איז גלייך דער סומע פון די חלקים פון וועלכע זי באשטייט:**

פאראויסבאדונג $a+b+c+d=A$; פעסטשטעלונג $A-a+b+c+d$

46. די גאנצע גרויס איז גרעסער פון יעדן פון אירע חלקים:

פאראויסבאדונג: $a+b+c+d=A$ פעסטשטעלונג: $A>a, A>b, A>c$ (63)

47. ווינען צוויי גרויסן איינציגווייז גלייך איין און דער-זעלבער דריטער, דאן זיינען זיי צווישן זיך אויך גלייך:

פאראויסבאדונג: 1) $A=B$; 2) $C=B$ פעסטשטעלונג: $A=C$

48. איז איינע פון דריי גרויסן גרעסער פון א צווייטער און די צווייטע גרעסער פון דער דריטער, דאן איז די ערשטע גרויס אויך גרעסער פון דער דריטער:

פאראויסבאדונג: 1) $K>M$; 2) $M>P$ פעסטשטעלונג: $K>P$

49. ווערן גלייכע גרויסן גלייך באהאנדלט, דאן ווערן זיי ווידער גלייך צווישן זיך, ד. ה.

50. ווערן צוויי גלייכע גרויסן פארגרעסערט, אדער געכפלט יעדע אויף א גלייכע גרויס, דאן ווערן זיי ווידער גלייך צווישן זיך:

פאראויס.: 1) $A=B$, 2) $T=E$ פעסטשט.: $A+T=B+E$; $A\times T=B\times E$

51. ווערן צוויי גלייכע גרויסן פארמינדערט, אדער געטיילט יעדע אויף א גלייכע גרויס, דאן ווערן זיי ווידער גלייך צווישן זיך:

פאראויסבאדונג: 1) $A=B$; 2) $E=T$

פעסטשטעלונג: $A-T=B-E$; $A:T=B:E$

52. אנשטאט איין גרויס קען מען נעמען אלע אירע חלקים, אדער א צווייטע, וואס איז גלייך צו איר:

פאראויסבאדונג: 1) $A=B$ 2) $X=m+n$

פעסטשטעלונג א: 1) $X+A=X+B$, 2) $X-A=X-B$

3) $X\times A=X\times B$, 4) $X:A=X:B$

„ ב: $m+n+A=m+n+B$; $m+n-A=m+n-B$

$(m+n)\times A=(m+n)\times B$; $(m+n):A=(m+n):B$

53. ווערן גלייכע גרויסן אומגלייך באהאנדלט, דאן ווערן זיי אומגלייך צווישן זיך, ד. ה.

54. ווערן צוויי גלייכע גרויסן פארגרעסערט אדער גע-כפלט יעדע אויף אן אומגלייכע גרויס, דאן ווערן זיי אומגלייך צווישן זיך אין דערזעלבער ריכטונג ווי ד:

אומגלייכע.

פאראויסבאדונג: 1) $A > B$, 2) $K > M$

פעסטשטעלונג: 1) $A+K > B+M$,2) $A \times K > B \times M$

.55 ווערן צוויי גלייכע גרויסן פארמינדערט אָדער געטיילט יעדע אויף אַן אומגלייכע גרויס, דאַן ווערן זיי אומגלייך צווישן זיך אין פאַרקערטער ריכטונג ווי די אומגלייכע.

פאראויסבאדונג: 1) $A = B$, 2) $K > M$

פעסטשטעלונג: 1) $A-K < B-M$ 2) $A:K < B:M$

(די סימנים פון דער אומגלייכהייט האָבן געענדערט זייער ריכטונג).

.56 אומגלייכע גרויסן גלייך באהאַנדלט בלייבן אומגלייך אין דערזעלבער ריכטונג:

פאראויסבאדונג: 1) $K > M$, 2) $A = B$

פעסטשטעלונג: 1) $K+A > M+B$; 2) $K \times A > M \times B$

3) $K-A > M-B$; 4) $K:A > M:B$

.57 **ווינען צוויי גרויסן אומגלייך און די קלענערע שטייגט אַרויף** (פארגרעסערט זיך) **און די גרעסערע—אַראָפּ** (פאַרקלענערט זיך) **ביידע אויף אַן אומענדלאך קליינעם שטאפל** (גרויס) **און אָן אַן אויפהער, דאן מוזן זיי איינמאָל, און נית מער ווי איינמאָל, ווערן גלייך צווישן זיך.**

די פאלגנדיגע רייהע, וואו צוויי אומגלייכע גרויסן (די צאָלן 5 און 21) מאכן דורך די פאַרענדערונג (אמת, אויף אַ גרויסן שטאפל: אַן 1) און גלייכן זיך אויס אויף דער גרויס פון 13 , ווייזט וואָס דער זאַץ מיינט.

21 20 19 18 17 16 15 14 **13** 12.....

5 6 7 8 9 10 11 12 **13** 14,....

.58 **רוימלאכע פיגורן.** אַלע ביז איצט באהאנדלטע פיגורן קענען מיר זיך נית פאָרשטעלן אָן דעם רוים, אין וועלכן זיי געפינען זיך אָדער אַ טייל פון וועלכן זיי בילדן. דעריבער הייסן זיי אויך רוימלאכע פיגורן.

.59 **געאָמעטריע.** די לערע וועגן די אייגנשאַפטן פון רוימלאַכע פיגורן הייסט געאָמעטריע, וואָס באַדייט אין דער איבערזעצונג „ערדמעסטונג", ווייל די לערע האָט זיך אַנטוויקלט אין אַלטערטום פון דער פּראַקטיקע ביים מעסטן די ערד. די געאָמעטריע איז אַנטשטאַנען טיף אין דער פאַרגאַנגענהייט. נאָך מיט 300 יאָר פאַר כריסטוסן, ד. ה. מיט 22 הונדערט יאָר

צוריק, האָט אַ גריכישער מאַטעמאַטיקער מיטן נאָמען **עייקליד** אָנגעשריבן עטלאַכע ביכער מיט געאמעטרישע פאָרשונגען.

אויסער דעם פּראַקטישן נוצן, וואָס מיר האָבן פון דעם לערנען געאָמעטריע, ד. ה. פון דעם פאָרשן די אייגנשאַפטן פון פיגורן בנוגע זייער פאָרם, געשטאַלט און לאַגע אַנטוויקלט דאָס לערנען געאָמעטריע, אונזערע גייסטיגע פעיִקייטן צום ריכטיגן קלאָרן דענקען און קלאָרן אַרויסזאָגן פון יעדער געדאַנק, קלאָרן אַרויסלייגן פון יעדער באַווייז, אַזוי אַז מיר זאָלן איבערצייגן דעם צוהערער אין דעם אמת פון אונזערע געדאַנקען.

.60 אידעאַלע פאָרמען. די געאָמעטרישע פיגורן, די פּינקטן, ליניעס, פלעכעס און קערפּער, זיינען אידעאַלע פאָרמען און געשטאַלטן. אין דער נאַטור האָבן מיר אַזעלכע פאָרמען ניט: עס גיט ניט אין דער נאַטור אַזאַ ליניע, וועלכע זאָל האָבן נאָר אַ לענג און קיין שום ממשותדיגע דיקקייט. אידעאַלע פלאַכעס, וואָס זאָלן ניט האָבן קיין דיקקייט (גרעב), זיינען אויך נישטאָ. ביים פּראַקטישן אָנווענדן די געאָמעטרישע זאַצן אויף ממשותדיגע קערפּער באַטראַכטן מיר די קערפּער אַלס אידעאַלע פאָרמען. טעותן קומען דערפון ניט אַרויס, עס איז אָבער אַ סך לייכטער צו באַטראַכטן אַן אידעאַלע געאָמעטרישע פיגור איידער אַ ממשותדיגן נאַטירלאַכן קערפּער מיט זיינע צופעליגע אומרעגלמעסיגקייטן.

.61 פלאַנימעטריע און סטערעאָמעטריע. די געאָמעטריע ווערט איינגעטיילט אין 2 טיילן. אין ערשטן טייל ווערן באַהאַנדלט די אייגנשאַפטן פון אַזעלכע פיגורן, וועלכע לייגן זיך אויס מיט אַלע זייערע טיילן אויף א פלאַכע, ווי למשל, אַ קוואַדראַט, אַן אומקרייז. דער טייל פון דער געאָמעטריע הייסט **פ ל אַ נ י מ ע ט ר י ע**. אין צווייטן טייל, וועלכער הייסט **ס ט ע ר ע אָ מ ע ט ר י ע**, ווערן באַהאַנדלט די אייגנשאַפטן פון פיגורן, וועלכע לאָזן זיך ניט אויסלייגן מיט אַלע זייערע טיילן אויף אַ פלאַכע, ד. ה. אייגנטלאַך געאָמעטרישער קערפּער, ווי למשל, אַ קויל, קוב, פּיראַמידע וכדומה.

.62 אָנווייזונג. אין גאַנצן ווייטערדיגן טעקסט ווערען די נומערן פון די אַפּזאַצן, אויף וועלכע עס קומט אויס זיך צו שטיצן, אדער זיי אָנצווייזן, אַריינגענומען אין קלאַמערן ( ). קלאַמערן מיט אותיות אינעווייניג באַציהען זיך אויף אַ זאַץ פון דעם זעלבן נומער, וואָס איז באַצייכנט מיטן זעלבן אות. לויט פאַרשטענדלאַכע טעמים האָבן ניט ערלויבט, אַז די קלישעען זאָלן געגעבן ווערן אין דער פולער מאָס צום טעקסט, צוליב וואָס עס קומט אויס אַפטמאָל איבערבלעטערן דעם בוך ווייט צוריק, כדי צו באַטראַכטן.

די באהאנדלטע פיגור. דאָס בעסטע אין דעם פאל איז איבערצוציכענען פאר־אויס די פיגור אויפן פאפיר און אויף איר פארשן דעם באווייז. אויך דארף מען אכטונג געבן אויף די פארקירצונגען אין סמנים, וועלכע זיינען אנגענומען אנשטאט ווערטער. **אלע גלייכונגען מיט לאטיינישע אותיות דארפן געלייענט ווערן פון לינקס אויף רעכטס, גלייכונגען מיט אידישע אותיות—פון רעכטס אויף לינקס.**

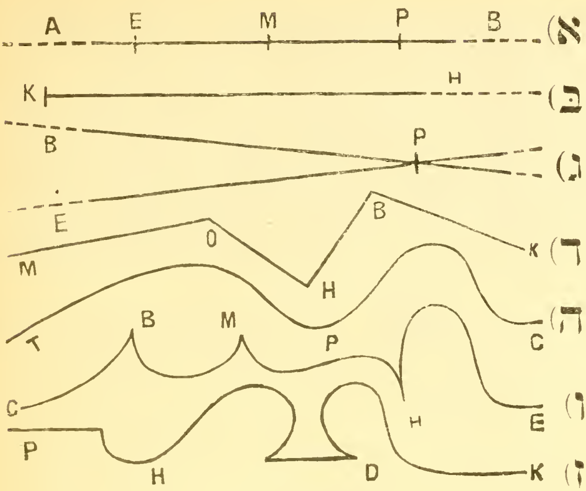
קאפיטל ב.

פונקט. גראָדע. ווינקל.

63. **דער פונקט** איז א געאמעטרישער באגריף, וואָס באצייכנט אן ארט, א לאגע אין רוים. דער פונקט האט ניט קיין שום געשטאלט און אויסמעסטונג (25) דאס איז אן ארט וואו עס קומען זיך צונויף ליניעס (7), פלעכעס (14). פראקטיש ווערט דער פונקט באצייכנט אויף א פלעכע מיט טינט, בליישטיפט, קרייד, אויפן פעלד מערקט מען אן א פונקט דורך א וועלכן עס איז סימן: א פלעקל אין דער ערד, א.ד.ג.

64. **די ליניע.** א ליניע קענען מיר באטראכטן אלס א גרעניץ פון א פלעכע (6), אדער אלס א שפור פון וועג פון א באוועגלאכן פונקט (19). ליניעס קענען זיין גראדע (10) און קרומע (11) א גראדע ליניע דארפן מיר זיך פארשטעלן אומענדלאך פארלענגערט פון אירע ביידע זייטן. אין דעם פאל באצייכנט זי א גאנצע רייע ערטער, פונקטן, וועלכע ווערן אלע צוזאמען באשטימט דורך דער לאגע פון דער גראדער אין רוים. דער פונקט איז אבער ניט קיין טייל פון דער גראדער, ווייל ער האט ניט קיין אויסמעס־טונג, וואס די גראדע פארמאגט יע (26). א גראדע ווערט באצייכנט דורך וועלכע עס איז צוויי אירע פונקטן.

65. **שטראל. שטרעקע.** א גראדע, וואס איז אפגעגרעניצט דורך א פונקט נאר פון איין זייט, הייסט שטראל (פיג. 12 **ב**) דער



פיג. 12.

פונקט (K) פון וואַנען אַ שטראל הויבט זיך אָן הייסט אָרויסגאנגס פונקט פון שטראל. א טייל פון א גראדער וואס איז אפגעגרעניצט דורך צוויי פונקטן פון ביידע זייטן הייסט שטרעקע (EP פיג.12 א) א שטרעקע ווערט אנגעמערקט און באצייכנט דורך אירע ביידע ענדעפונקטן. מיטן ווארט שטרעקע מיינען מיר ניט נאר איר לאגע אויף דער גראדער, נאר אויך די לייננ צווישן אירע ענדעפונקטן. א גראדע בכלל איז א רייע לאגעס פון פונקטן, א שטרעקע איז א געוויסע לייננ. דער פונקט אויף דער שטרעקע וואס איז גלייך דערווייטערט פון אירע ענדעפונקטן, הייסט מיטנפונקט פון דער שטרעקע. אויף דער פיג. 12 א איז M דער מיטנפונקט ווייל EM = MP

.66 ווען צוויי גראדע האבן ניט מער ווי איין שותפותדיגן פונקט, דאן זאָגן מיר: די גראדע שניידן זיך; זייער שותפותדיגער פונקט ווערט אָנגערופן שניטפונקט (פיג. 12 ג; P איז דער שניטפונקט פון צוויי גראָדע).

א רייע שטרעקעס, וואס שניידן זיך אין זייערע ענדעפונקטן, הייסט געבראכענע ליניע (פיג. 12 ד).

.67 אַ ליניע, וואס קיין טייל פון איר לייגט זיך ניט צונויף מיט א גראדער, הייסט קרומע ליניע (11) (פיג. 12 ה). באשטייט די קרומע פון איינצלנע טיילן, וואס שניידן זיך אין פונקטן, דאן הייסט זי א קרומגעבראכענע ליניע (פיג. 12 ו) א ליניע וואס באשטייט פון גראדע און קרומע הייסט געמישטע (פיג 12 ז).

.68 די איינפאַכסטע קרומע ליניע איז דער אומקריַיז. עטלאַכע זיינע אייגנשאַפטן האָבן מיר שוין באַהאַנדלט (30). דעם אומקריַיז אַלס אַ שפּור פון באַוועגלאַכן פונקט האָבן מיר באַטראַכט אין (31). אַ טייל פון

אומקרייז הייסט בויגן. דער וואָרט בויגן ווערט באַצייכנט מיטן סימן
בויגנס פון איין און דעמזעלבן אומקרייז, אָדער פון אומ=
קרייזן מיט גלייכע ראַדיוסן, קען מען פאַרגלייכן און מעסטן מיט
בויגנגראַדן, (°) בויגנמינוטן (′) און בויגנסעקונדעס (″) (31,32).

69. **א**יצט וועלן מיר באַטראַכטן עטלאכע אייגנשאַפטן פון אַ גראַדער
ליניע, אָדער פשוט: גראַדער, וועלכע ווערן אַרויסגעדרונגען פון אַ
זאַץ (36) וואס מיר וועלן אים אָננעמען אָן אַ באַווייז (43) און וועלכער
באַהאַנדלט די לאַגע און די ריכטונג פון אַ גראַדער אין רוים.

אַקסיאָמע: אַ גראַדע ווערט פולקום באַשטימט דורך צוויי אירע פונקטן. דערפון דרינגען מיר באַלד אַרויס:

70. **שלוסאָן: דורך צוויי פונקטן קען מען ציהען ניט מער ווי איין גראַדע** (ווען ניט וואָלטן די צוויי אירע פונקטן
זי ניט באַשטימט) **דורך איין פונקט אומענדלאַך פיל גראַדע.**
(באַווייז עס מיט אַ צייכענונג אויפן פאַפיר.)

71. שלוסאָן: צוויי גראַדע קענען זיך שניידן (66) ניט מער
ווי אין איין פונקט, קענען האָבן ניט מער ווי איין
שותפותדיגן פונקט (70).

72. **שלוסאָן: צוויי גראַדע באַשטימען פולקום די לאַ=
גע פון זייער שותפותדיגן פונקט (שניטפונקט)** (71).

73. **שלוסאָן: האָבן צוויי גראַדע צוויי שותפותדיגע
פונקטן, דאַן דעקן זיי זיך מיט אַלע זייערע פונקטן**
(גיסן זיך צונויף) (70). דערפון דרינגען מיר ווידער אַרויס, אַז כדי צונויפ=
צולייגן צוויי גראַדע, דאַרפן מיר צונויפלייגן ניט מער ווי צו
צוויי פון זייערע פונקטן: די איבעריגע וועלן זיך במילא צונויפלייגן.

74. **א**זוי ווי צוויי גראַדע קען מען שטענדיג צונויפלייגן, קענען מיר אויף
אַזא אופן פאַרגלייכן גראַדע שטרעקעס צווישן זיך (מעסטן זיי). צוויי
שטרעקעס הייסן גלייך ווען זייערע ענדעפונקטן דעקן זיך
ביים צונויפלייגן. **ביים צונויפלייגן דעקן מיר פריהער איין
פאַר ענדעפונקטן** און באַטראַכטן די צווייטע פאַר, ווי זיי לייגן זיך איינס
אייגער אנטקעגן דעם אנדערן (29).

75. **ריכטונגען.** דער פונקט, וואָס די שפור פון זיין באַוועגונג,
בילדעט אַ גראַדע אָדער קרומע ליניע, קען זיך באַוועגן אויף דער
ליניע אין צוויי ריכטונגען: אַרויסגייענדיג פון וועלכן עס איז אָרט אויף דער
גראַדער, קען ער זיך באַוועגן אויף **רעכטס אָדער לינקס** פון דעם

אָרט, אויפן אומקרייז קען די באוועגונג פאָרקומען **מיטן זייגערווײַזער אָדער אַנטקעגן דעם זייגערווײַזער.** די ליינג פון וועג, וועלכן דער פונקט מאכט דורך בעת דער באוועגונג, בלייבט גאנץ באשטימט, אין וועלכער ריכטונג ער זאָל זיך ניט באוועגן, די לאגע אָבער אין וועלכער ער שטעלט זיך אָפּ נאָך דער באוועגונג, דער אָרט וואו ער געפינט זיך בלייבט אומבאשטימט, ווען אונז ווערט ניט אָנגעוויזן די ריכטונג אין וועלכער ער האָט זיך פריהער באוועגט. די ריכטונג קען אָנגעוויזן ווערן מיט אַ וואָרט: רעכטס, לינקס, אויבן, אונטן, מיטן זייגערווײַזער, אַנטקעגן דעם זייגערווייזער. אין מאטעמאַטישע זאצן ווערט די ריכטונג אָנגעוויזן מיט די סימנים (+) אָדער (—). אזוי למשל ווערט אויף דער מאפּע די ליינג צו מזרח און די ברייט צו צפון אנגעוויזן מיטן פארצייכן (+), די ליינג צו מערב און די ברייט צו דרום מיט אַ (—), רעכענענדיג פון ערשטן מערידיאן און פון עקוואטאָר. אזא באצייכענונג פון ריכטונגען שפּאָרט אונז איין דעם שרייבן די ווערטער: רעכטס, לינקס, א. ד. ג. און, וואָס איז אומגעהייער וויכטיגער, פארלייכטערט אונז דעם פארשן די פיגורן, ווייזט אונז אליין אָן אַ ריכטונג, ווען מיר קענען זי ניט באשטימען. שפּעטער וועלן מיר האָבן אַ סך ביישפּילן דערצו.

.76 געאָמעטרישער צייכענען פון פיגורן. אַלע פיגורן וועלכע אונז וועט אויסקומען צו באהאנדלען, אָדער צו צייכענען, וועלן באשטיין פון שטרעקעס און אומקרייזבויגנס פון פארשיידענער גרויס און פארשיידענער לאגע. מיר דאַרפן דעריבער קענען אָנצייכענען אַ שטרעקע און אַן אומקרייז, און אויך מאכן מיט זיי פארשיידענע רעכענונגען, ניט אריפמעטיש ד. ה. מאכנדיג די רעכענונג מיט די צאלן, וואָס דריקן אויס זייערע גרויסן נאר **צייכנעריש** אָדער, ווי דאָס הייסט, **גראַפיש** (גראַפאָ—הייסט אויף גריכיש שרייבן). די אינסטרומענטן, וועלכע ווערן דערביי באנוצט זיינען: אַ ווירע און אַ צירקל. דער קאנט פון דער ווירע דארף זיין אַ גראדע ליניע.

א) אָנצייכענען און אַריבערטראָגן אַ געגעבענע שטרעקע (אָפּשטעכן אַ שטרעקע). מיר ציהען אַ וועלכע עס איז גראָדע, מערקן אָן דורך אַ שטריך מיטן פעדער אָדער בליישטיפט אַ וועלכן עס איז פונקט אויף איר, ציהען פאנאנדער אויף דעם געגעבענער ליינג די פיסלאך פון צירקל (אויפמאַכן דעם צירקל), שטעלן איין דעם שפּיץ פון צירקל אין שוין אָנגעמערקטן פונקט און שטייבן אָן מיטן בליישטיפט פון צירקל אַ פונקט (אָדער רעכטס אָדער לינקס פון אָנגעמערקטן) אויף דערזעלבער גראדער. די שטרעקע צווישן די צוויי אָנגעמערקטע פונקטן וועט זיין גלייך דער געגעבע-

נער. א שטרעקע בכלל מערקט מען אן מיט צוויי שטריכן. **די ענדעפונקטן פון א שטרעקע דארפן שטענדיג אנגעמערקט ווערן מיט קליינע שטריכן** (ווייל זי איז א ליינג) **ביי וועלכע מען שטעלט די אותיות.**

ב) **אנצייכענען אן אומקרייז אדער א בויגן** קען יעדערער. אריבערטראגן א בויגן קען מען נאר ענטוועדער אויף איין דעמזעלבן קרייז פון איין לאנגע אין א צווייטער אדער פון איין אומקרייז אויפן צווייטן, **ווען זייערע ראדיוסן זיינען גלייך.** בויגנס פון פארשיידענע אומקרייזן קען מען ניט צונויפלייגן. כדי אריבערצוטראגן א בויגן, מאכט מען אויף דעם צירקל אזוי אז זיינע שפיצן זאלן אויסקומען אין די ענדעפונקטן פון בויגן און מען טראגט דעם בויגן אריבער ווי א שטרעקע. א בויגן פון א באשטימטער ליינג דארף אויך אנגעמערקט ווערען דורך שטריכן אין די ענדעפונקטן.

ג) **צונויפרעכענען (סומירן) שטרעקעס אדער בויגנס.** פון אן אנגענומענעם פונקט, דעם ארויסגאנגס פונקט, דארפן די שטרעקעס אדער בויגנס, (די סומענטן) אפגעלייגט ווערן נאכאנאנד אין איין ריכטונג (אדער אויף רעכטס, אדער אויף לינקס מיטן זייגער ווייזער, אדער אנטקעגן (75) אזוי אז יעדער ווייטערדיגע שטרעקע זאל זיך אנדויבן אין דעם ענדעפונקט פון דער פריהערדיגער. די שטרעקע דער בויגן צווישן דעם ארויסגאנגס פונקט און דעם לעצטן אנגעמערקטן פונקט איז די סומע פון די די אנגענומענע שטרעקעס (בויגנס).

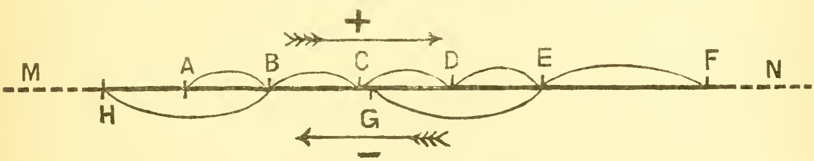
ד) **אראפרעכענען שטרעכעס.** די שטרעקע פון וועלכער א צווייטע (אדער עטלאכע) ווערט אראפגערעכנט ווערט אפגעלייגט אין איין ריכטונג, **די שטרעקע וועלכע ווערט אראפגערעכנט, ווערט אפגעלייגט אין פארקערטער ריכטונג,** צוריק, אבער אלץ ארויסגייענדיג פון דעם ענדעפונקט פון דער פריהערדיגער. מיט בויגנס ווערט געמאכט דאסזעלבע. די שטרעקע (בויגן) צווישן דעם ארויסגאנגספונקט און דעם לעצטן אנגעמערקטן פונקט איז די דיפערענץ פון די אנגענומענע שטרעקעס.

ה) **כפלען א שטרעקע (א בויגן)** אויף א צאל הייסט צונויפרעכענען זי עטלאכע מאל. דאס איז אייגנטלאך א מערפאכיגער סומירן.

ו) **טיילן א געגעבענע שטרעקע (בויגן)** אויף א צאל הייסט געפינען אזא קלענערע שטרעקע (בויגן), וואס זאל זיך אויסלייגן אזוי פיל מאל אין דער געגעבענער, וויפיל די צאל ווייזט. דאס ווערט געמאכט פרובירנדיג בישלאכוויז, ביז מיר באקומען אזא קליינע שטרעקע (בויגן) וואס לייגט זיך

אויס אין דער גרויסער וויפיל מאָל מיר דארפן.

ו) טיילן אַ שטרעקע (בויגן) אויף אַ שטרעקע (בויגן) הייסט געפינען וויפיל מאָל די קלענערע לייגט זיך אויס אין דער גרעסערער. פון איין ענדע־פונקט פון דער גרעסערער שטרעקע (בויגן) לייגט מען אָפּ נאָכאנאנד די קלענערע (ווי סימענטן), און מען ציילט וויפיל מאָל די קלענערע לייגט זיך אויס אויף דער גרעסערער. ווען עס בלייבט אַ רעשטל, אין וועלכן די קלע־נערע לייגט זיך ניט אויס, דאן טיילט מען די קלענערע אין עטלאַכע (2,3,4, א. א. וו.) גלייכע חלקים (ווי אַן אַרשין אין 16 ווערשאָק) און מען לייגט אויס דעם חלק אין דעם רעשטל. בלייבט ווידער אַ רעשטל, דאן טיילט מען שוין דעם חלק אַליין אין קלענערע חלקים, וועלכע מען לייגט אויס אין צווייטן רעשטל א. א. וו. א. א. וו. די גרעסערע שטרעקע, הייסט עס, קען אנטהאַלטן די קלענערע עטלאכע גאַנצע מאָל מיט נאָך חלקים פון דער קלענערער. די פיג. 13 ווייזט דעם גראפישן רעכענען.



פיג. 13.

A איז דער אַרויסגאַנגספונקט.

די שטרעקע AB איז גלייך a; די שטרעקע AC איז גלייך a+a אָדער a מאָל 2

" " AD " " a+a+a אָדער a מאל 3 א. א. וו.

" " AF " " 4a+b; די שטרעקע AF איז גלייך 4a—b

" " AH " " a—b

" " AB " " אַ פערטל פון AE אָדער אַ דריטל פון AD

" " AE אַנטהאַלט די שטרעקע AB 4 מאָל.

באמערקונג: אויסער די ספּעציעלע סימנים, וואָס זיינען דערמאָנט אין טעקסט, וועלן מיר אָננעמען פאָלגנדיגע פארקירצונגען: מעטער—**מ.**; דעקאמעטער (10 מ.=)—**דקמ.**; העקטאָמעטער (100 מ.=)—**המ.**; קילאָמעטער (1000 מ.=)—**קמ.**; דעצימעטער ($^1/_{10}$ מ.=)—**דמ.**; סאַנטימעטער ($^1/_{100}$ מ.=)—**סמ.**; מילימעטער ($^1/_{1000}$ מ.=)—**ממ.**; ווערשאָק-**ווש.**, אַרשין-**אַרש.**; סאַזשען—**סזש.**; וויאָרסט-**וורס.**; צאָל—**צל.**; פוס—**פ.**; קבט. ווערט באַדייט די לייג פון אַ זייט פון אַ קעסטעלע פון אַריפמעטישן שרייב־פּאַפּיר.

77. אויפגאבעס. מעסטן און אויפשטעלן פיגורן.

א) דורך אַ געגעבענעם פונקט ציהען עטלאכע גראָדע; (70)

ב) דורך צוויי געגעבענע פונקטן ציהען אַ גראָדע (70) און אָפּשטעכן אויף איר פון אַ געגעבענעם פונקט שטרעקעס פון 2, 3 א. א. וו. סמ.;

ג) אויפשטעלן אַ שטרעקע, וואָס זאָל זיין גלייך דער סומע, אָדער דיפערענץ, פון צוויי געגעבענע שטרעקעס.; כפלען אַ שטרעקע אויף 2, 3 א. אַ. וו.

ד) אָפּשטעכן אַ שטרעקע, וואָס זאָל זיין גלייך דער לייננג פון אַ געבראכע- נער גראָדער (66).

ה) פון אַ געגעבענער סומע פון צוויי שטרעקעס און איינער פון זיי אויפ- שטעלן די צווייטע; פון אַ געגעבענער דיפערענץ און דער קלענערער—אויפ- שטעלן די גרעסערע; פון א געגעבענער דיפערענץ און דער גרעסערער— אויפשטעלן די קלענערע.

ו) a, b, c זיינען די לייננגען פון דריי געגעבענע שטרעקעס: 5 קסט.$=a$, 3 קסט.$=b$, 2 קסט.$=c$; אויפשטעלן פאָלגנדיגע שטרעקעס:

1) $a+b+c$; $a+b-c$; $a-b+c$; $a-b-c$; $b+c-a$;

2) $2a+3b+c$; $a+3b+2c$; $2a+b+2c$

3) $2a-3b+c$; $a+3b-2c$; $3b+2c-a$;

4) $3a-5b$ $2a-5b$

שרייב אָן אנשטאט a און b זייערע לייננגען און מאך די רעכענונג $(2a-5b)$ מיט צאלן, וואָס וועט אויסקומען צו מאכן? ווי דארף מען דאס פארשטיין $(10-15=-5)$. (75)

5) באווייז דורך אַ צייכענונג (און פארמולירן עס אין אַ זאץ) אַז:

$$a+b+c=b+c+a=c+b+a=c+a+b=b+a+c$$

6) באווייז דורך א צייכענונג אַז:

$$a+(b-c)=a+b-c;\quad a-(b+c)=a-b-c;\quad a-(b-c)=a-b+c$$

7) אויב a איז אַ געוויסע לייננג, וואס קען באדייטן $a\times a$ און $a\times a\times a$?

ז) ארום אַ געגעבענעם פונקט ארומציהען אַן אומקרייז מיט אַ ראדיוס פון 5 סמ. וויפיל סטרונעס פון 5 סמ. די לייננג וועלן זיך אויסלייגן נאָכאנאנד אויפן אומקרייז?

ח) מיט א געגעבענעם ראדיוס ציהען אן אומקרייז וואס זאל דורכגיין דורך א געגעבענעם פונקט. ווי וויט דארף אפשטיין דער צענטער פון דעם פונקט?

ט) ציהען אַן אומקרייז, אנמערקן אויף אים 4 פונקטן און פארבינדן זיי

דורך סטרונעס.

י) געגעבן איז אן אומקרייז און צוויי בויגנס אויף אים. לייזן די אויפגא-בעס (ג) (ד) (ה), נאר בנוגע צו די געגעבענע בויגנס.

יא) a, b, c זיינען געגעבענע בויגנס פון איין אומקרייז (a > b > c). לייזן די אויפגאבעס פון (ו,1), נאר בנוגע די געגעבענע בויגנס. (75)

יב) געגעבן איז א גראדע און א פונקט אויסער איר. ארום פונקט ארומ-ציהען אן אומקרייז, וואס זאל שניידן די גראדע אין צוויי פונקטן, וועלכער פון די צוויי שניטפונקטן שטייט אפ ווייטער פון געגעבענעם פונקט? (30)

יג) אנצייכענען צוויי אומקרייזן מיט 1 שותפותדיגן פונקט, מיט 2, מיט 3..

יד) 8 שטראלן גייען ארויס פון איין פונקט, ווי קען מען צום לייכטסטן געפינען אויף יעדער שטראל דעם פונקט, וואס זאל זיין דערווייטערט אויף 5 סמ.=a פון שותפותדיגן פונקט?

טו) צייכן אן אויף דורכזיכטיגע פאפיר צוויי אומקרייזן פון איין און דעמזעלבן ראדיוס, לייג צונויף זייערע מיטלפונקטן. וואס קומט פאר מיט די אומקרייזן? שטעך דורך די צענטערס מיט א נאדל און דריי ביידע קרייזן ארום צענטער צו וועלן די אומקרייזן אראפטרעטן איינער פון אנדערן?

78. אויפגאבעס. אויסרעכענונג.

א) פינף דערפער A,B,C,E און M ליגן אין דער נעגעבענער רייע, אויף איין ג-ראדער אזוי, אז C ליגט אין מיטן צווישן A און M. דער דארף E איז 2,64 קמ. ווייט פון C און 5,16 קמ. ווייט פון B,M איז דערווייטערט פון C אויף 3,60 קמ. ווי ווייט איז יעדער דארף פון די איבעריגע?

ב) די טרעפלאך פון א טרעפ זיינען 22 סמ. הויך איינע איבער דער אנדערער. איינער האט אנגעציילט 52 טרעפלאך, ארויפגייענדיג צו זיך אין וואוינונג. אויף וועלכן עטאזש וואוינט ער, אויב די הויך פון אן עטאזש בא-טרעפט 2,86 מ.?

ג) וויפיל שריט דארף מאכן א פוסגייער אויף דער שטרעקע פון 1 קמ. ווען זיינער א שריט איז 70 סמ. לאנג?

ד) א פאסאזשיר האט אנגעציילט אין משך פון 6 מינוט 201 קלאפ, בעת דער ראד פון וואגאן גייט דורך איבערן שפאלט צווישן צוויי שינעס. מיט וועלכער שעהדיגער געשווינטקייט אין קמ. באוועגט זיך דער צוג, אויב די לייגנפון א שינע באטרעפט 65 דמ?

ה) דריי דערפער A,B און C שטייען אפ איינער פון אנדערן אזוי: A פון B—12 קמ., B פון C—7 קמ., A פון C—16 קמ.; צו ליגן די דער-פער אויף איין גראדער ליניע? ווי קענען זיי ליגן אנדערש?

ו) אויף אַ גראָדער איז אָנגעמערקט אַ שטרעקע AB פֿון 20 צל. די לײַנג און נאָך צוויי פּונקטן: פּונקט C—6 צל. ווײַט פֿון A, און פּונקט E—12 צל. ווײַט פֿון B; ווי לאַנג איז די שטרעקע CE? (4 לאַגעס, 75)

ז) די זעלבע ווי (ו), נאָר BE איז 18 צל. לאַנג און AC—8 צל.?

ח) דיזעלבע ווי (ו), נאָר AC מאַכט אויס $^1/_2$, און BC—$^1/_3$ פֿון AB און CE איז 3,85 מ. לאַנג. ווי לאַנג איז AB?

ט) אַ פּונקט C טײַלט אַ שטרעקע AB אין צוויי אומגלײַכע טיילן AC און CB; די מיטנפּונקטן פֿון בײדע טיילן שטרעקעס זײַנען 12 דמ. ווײַט איינע פֿון אַנדערן. ווי לאַנג איז AB?

י) וויפֿיל שטרעקעס (גראָדע) קען מען ציִען צווישן 3,4,5,6, א. א. וו. פּונקטן, וואָס יעדערע דרײַ פֿון זיי ליגן ניט אויף איין גראָדער? צו קען מען ניט געפֿינען אַזאַ כּלל, וואָס זאָל גילטן פֿאַר אַ באַליביקער צאָל פּונקטן? (באַטראַכט, וויפֿיל מאָל ווערט דורכגעמאַכט יעדע גראָדע בײַם ציִען זי פֿון אירע צוויי ענדפּונקטן).

יא) אויף אַן אומקרײַז זײַנען אָנגעמערקט 5 פּונקטן אין אַזאַ געגעבענער רײַע: A,B,C,E און M, אַזוי, אַז פּונקט C איז גלײַך דערווײַטערט פֿון A און M, ⌣CE אַנטהאַלט 14°20′30″, ⌣EM אַנטהאַלט 28°30′15″, ⌣BC אַנטהאַלט 35°9′15″. וויפֿיל גראַד, מינ., סעק. ליגט צווישן יעדער פּונקט און אַלע איבעריקע?

יב) אויף אַ בויגן פֿון אַ צאַנראָד, וואָס אַנטהאַלט 57°29′18″ ליגן זיך אויס 17 צײן. וויפֿיל גראַד, מינ. און סעק. פֿאַרנעמט יעדער צאָן?

יג) יעדער צאָן פֿון אַ צאַנראָד פֿאַרנעמט 2°13′20″. וויפֿיל צײן פֿאַרמאָגט דער ראָד?

יד) וויפֿיל גראַד מינוטן און סעקונדעס פֿאַרנעמט דער ⌣ צווישן די זייגערווײַזערס 10 מינוטן נאָך צוועלף דעם זייגער? $(^{10}/_{60} \cdot 360^0 : (^{10}/_{60} - ^1/_{12})$

טו) דיזעלבע ווי פֿריִער: 35 מינוטן נאָך 3 דעם זייגער?

טז) אויף אַן אומקרײַז איז אָנגעמערקט אַ בויגן AB, וואָס אַנטהאַלט 40°15′30″ און נאָך צוויי פּונקטן—C און E, אַזוי אַז C שטייט אָפּ אויף 15°20′15″ פֿון פּונקט A, און פּונקט E—אויף 18°25′30″ פֿון B. וויפֿיל גראַד, מינ. און סעק. אַנטהאַלט דער ⌣ CE? (4 לאַגעס, 75)

יז) דיזעלבע ווי (טז), נאָר בויגן BE אַנטהאַלט 29°20′40″? (75)

יח) די זעלבע ווי פֿריִער נאָר ⌣ AC מאַכט אויס אַ $^1/_2$ און ⌣BE אַ $^1/_3$ פֿון ⌣AB?

יט) אַ קלעצל פֿון אַ ברעמזע (טאָרמאָז) נעמט אַרום אַ 15-טל פֿון ראָד; וויפֿיל גראַד., מינ. און סעק. מאַכט עס אויס?

79. אויפגאַבעס: באַווייַזן.

א) אויף א גראדער ליגט אַ שטרעקע AB מיטן מיטנפונקט M און צוויי פונקטן C און E אזוי, אַז $AC=AM$ און $BE=BM$; באַווייַזן, אַז $CE=2AB$ (אָדער: $CE=\frac{1}{2}AB$).

באווייַז: (54) 1) $CE=CA+AM+MB+BE$;

2) $CA+AM+MB+BE=AM+AM+MB+MB$ (52) $=2AM+2MB$

3) $CE=2AM+2MB$ (47) $=2(AM+MB)=2AB$ (52).

ב) צווישן די עֶנרעֶפּונקטן A און B פון אַ שטרעקע AB זייַנען אָפּגעשטאָכן נאָך דריי פונקטן, אָנהויבנדיג פון A: C, M און E; געגעבן איז, 1) אַז $AC=BE$ און $CM=ME$ — באַווייַזן אַז M איז דער מיטנפונקט פון AB ד. ה. אַז $AM=MB$; 2) געגעבן איז, אַז $AM=MB$ און $CM=ME$, — באַווייַזן, אַז $AC=EB$ און $AE=CB$; 3) געגעבן איז, אַז $AM=MB$ און $AC=EB$, — באַווייַזן, אַז $CM=ME$ און $AE=CB$; 4) געגעבן איז, אַז $AM=MB$ און $AE=CB$, — באַווייַזן, אַז $CM=ME$ און $AC=EB$.

ג) אויף אַ גראָדער איז אָפּגעשטאָכן אַ שטרעקע AB מיטן מיטנפונקט M און אָנגעמערקט אַ פונקט P, וואָס ליגט נענטער צו A; באַווייַזן, אַז $BP-AP=2MP$ (2.: $BP+AP=2MP$) אויב דער פונקט P, ליגט אויף דער שטרעקע (2.: אויסער דער שטרעקע) AB. (75)

ד) איבערמאַכן אַלע אויפגאַבעס פון (א) ביז (ד), נאָר בנוגע צו בויגנס פון איין און דעמזעלבן אומקרייַז.

ה) אַ פונקט P ליגט אין דעם אומקרייַז (2: אויסער דעם אומקרייַז) פון אַ קרייז מיטן צענטער M; באַווייַזן אַז די שטרעקע PM איז קלענער (2: גרעסער) פון דעם ראַדיוס פון קרייז.

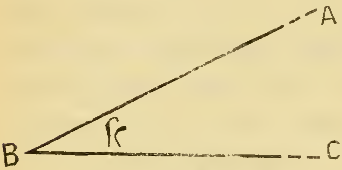
ו) איין אומקרייז ליגט אין (2: אויסער) דעם צווייטן. זיי האָבן ניט קיין שותּפותדיגע פונקטן; זייערע מיטלפונקטן הייסן M און C; באַווייַזן אַז די שטרעקע MC איז קלענער פון דער דיפערענץ (2: גרעסער פון דער סומע) פון די ראַדיוסן פון ביידע אומקרייַזן. (ה)

ז) צוויי אומקרייַזן האָבן איין שותּפותדיגן פונקט. זייערע מיטלפונקטן הייסן C און M, און דער מיטלפונקט פון איין אומקרייַז ליגט אין (2: אויסער) דעם צווייטן אומקרייז. באַווייַזן, אַז די שטרעקע MC איז גלייך דער דיפערענץ (2: דער סומע) פון די ראַדיוסן פון ביידע אומקרייַזן. (צייכן עס אָן)

ח) צוויי אומקרייַזן האָבן צוויי שותּפותדיגע פונקטן. זייערע מיטלפונקטן הייסן C און M און דער מיטלפונקט פון איין אומקרייַז ליגט אין (2: אויסער) דעם

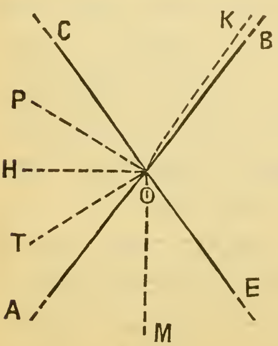
צווייטן אומקרייז. באַווייַזן אַז די שטרעקע MC איז קלענער פֿון ראַדיוס פֿון גרעסערן אומקרייז (2: גרעסער פֿון דער דיפערענץ פֿון ביידע ראַדיוסן פֿון די אומקרייזן (ה)

80. **ווינקל.** די נייגונג פֿון צוויי שטראַלן (65) איינעם צום אַנדערן, וואָס גייען אַרויס פֿון איין פונקט, הייסט ווינקל (פֿיג. 13) דער שותפותדיגער פונקט פֿון ביידע שטראַלן הייסט שפּיץ פֿון ווינקל, די שטראַלן אַליין — זייטן פֿון ווינקל. אַ ווינקל ווערט באַצייכנט און אָנגערופן ענטוועדער דורכן אות, וואָס שטייט ביים שפּיץ, למשל ווינקל B (פֿיג. 13), אָדער דורך אַן אות וואָס שטייט אינעווייניג, צווישן די זייטן, למשל ווינקל **א**, אָדער דורך דריי אותיות, וואָס שטייען ביים שפּיץ און ביי די זייטן; דער אות, וואָס ביים שפּיץ, דאַרף שטיין צווישן די איבעריגע, למשל ווינקל ABC אָדער ווינקל CBA (אָבער ניט ACB). אנשטאט דעם וואָרט „ווינקל" באַנוצט מען דעם סימן ∢.



פיג. 13.

81. כּדי בעסער צו אונטערשיידן די זייטן פֿון ווינקל איינער פֿון דער אַנדערער, גיבן מיר יעדער זייט אַ נאָמען אויף אַזאַ אופן: שטייענדיג אין שפּיצפּונקט, שטרעקן מיר אויס די הענט איבער ביידע זייטן פֿון ווינקל און רופן אָן יעדע זייט מיטן נאָמען פֿון דער האַנט, וואָס איז אויסגעשטרעקט איבער איר. (די ברעגעס פֿון אַ טייך ווערן אויך באַצייכנט אויף אַזאַ אופן). אויף דער פיג. 13 וועט BA זיין **די לינקע זייט פֿון ווינקל** ABC, BC — **די רעכטע זייט.** ווען מיר איבערקערן די פּלאַטע אויף וועלכער דער ווינקל איז געצייכנט. (אָדער זי באַטראַכטן פֿון אונטן), דאַן וועלן זיך די זייטן פֿון ווינקל בייטן מיט זייערע נעמען. זייטן פֿון ווינקלען מיטן זעלבן נאָמען הייסן **איינאַרטיגע זייטן**, מיט פאַרשיידענע נעמען — **פאַרשיידן-אַרטיגע זייטן.**



פיג. 14.

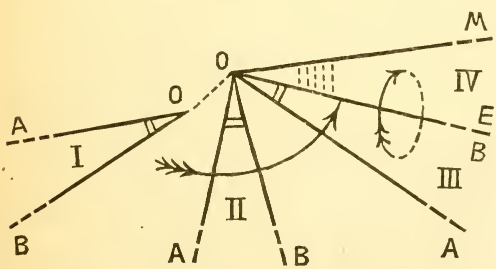
82. **ציִהען** מיר דורכן שפּיץ פֿון ווינקל, למשל AOC פיג. 14. נאָך עטלאכע שטראַלן (OT, OH, OP), וועלכע ליגן צווישן די זייטן פֿון ווינקל AOC, דאַן באַקומען מיר נאָך עטלאכע ווינקלען — AOT, TOH, HOP א.א.וו., וועלכע בילדן טיילן פֿון גאַנצן ווינקל AOC, ווינקל AOC איז **די סומע** פֿון אַלע ניִבאַקו-מענע ווינקלען, און איז גרעסער פֿון יעדן פֿון די טיילווינקלען (46). **אַראָפּרעכענענ-**

דיק פון גאנצן ווינקל AOC וועלכן עס איז פון די נײַבאַקומענע, אָדער עטלאַכע פון זיי, וועלן מיר באקומען **די דיפערענץ** פון גאנצן ווינקל און ז״נעם אַ טייל. זײַנען די נײַבאקומענע ווינקלען גלײַך צווישן זיך, דאן איז דער גאנצער ווינקל AOC **עטלאַכע מאָל גרעסער** (אויף דער פיג. 14 פיר מאָל) פון יעדן איינצלנעם, און פאַרקערט: יעדער איינצלנער איז **עטלאַכע מאָל קלענער** פון גאנצן. ווינקלען, הייסט עס, קען מען כפלען, טיילן, סומירן און אראָפּרעכענען. דער ווינקל איז אַ מאַטעמאַטישע גרויס (35). **די גרויס פון אַ ווינקל ענדערט זיך ניט פון פארלייִנגערן אָדער פארקירצן זײַנע זײַטן, כל זמן די נייגונג צווישן די זײַטן בלײַבט אומפאַרענדערט.**

83. **באשטימונג:** צוויי ווינקלען הייסן גלײַך צווישן זיך, אויב זיי דעקן זיך בײַם ארויפלײַגן זיי איינעם אויפן אנדערן. פון דעם שליסן מיר באלד:

84. **שלוסזאץ:** ווען איין פאר גראדע דעקט א צווייטע, דאן שניידן זיך די גראדע פון דער ערשטער פאר אין דעמזעלבן פונקט און מיטן זעלבן ווינקל, ווי די גראדע פון דער צווייטער, ווען די לעצטע שנײַדן זיך בכלל.

85. **ארויפלײַגן ווינקלען.** ארויפלייגן צוויי ווינקלען איינעם אויפן אנדערן קען מען אזוי: מיר שטעלן זיך פאר, אז יעדער ווינקל ליגט אויף פלאטעס, וועלכע פארדעקן איינע די אנדערע. די אויבערשטע פלאטע מיט איר ווינקל (למשל AOB פיג. 15) שארן מיר איבער דער אונטערשטער (איר ווינקל זאל זײַן MOE) ביז די שפיצן O פון זײַערע ווינק־לען וועלן זיך דעקן (צו־נויפלייגן). דערנאך דרייען מיר די אויבערשטע פלאטע איבער דער אונ־



פיג. 15.

טערשטער ארום דעם צונויפגעלײגטן פונקט O (ווי מילשטיינער איינעם איבערן אנדערן) ביז א פאר זייערע פארשיידנארטיגע זײַטן (OB און OE פיג. 15) וועלן זיך דעקן (83). ארויסגייענדיג פון דער לאגע, קען מען

דעקן די איבעריגע צוויי זייטן אויף צוויייערליי אופנים:

86. **דרייאונג ארום א פונקט (אדער צענטער).** די ביזאיצטיגע דרייאונג, דורך וועלכער מיר האבן שוין צונויפגעלייגט די צוויי פארשיידנארטיגע זייטן, פירן מיר ווייטער ארום רעטזועלבן פונקט (שפיצפונקט) די צונויפגעלייגטע זייטן וועלן אפטרעטן איינע פון דער אנדערער ביז די **איינארטיגע זייטן וועלן זיך צונויפלייגן**, אויב די ווינקלען זיינען גלייך. זיינען די ווינקלען ניט גלייך, דאן וועט איין פאר איינארטיגע זייטן בלייבן צונויפגעלייגט, די צווייטע פאר—ניט. דער ווינקל, וואס זיין אנדער זייט וועט ליגן צווישן די זייטן פון צווייטן ווינקל, הייסט קלענער פאר'ן צווייטן.

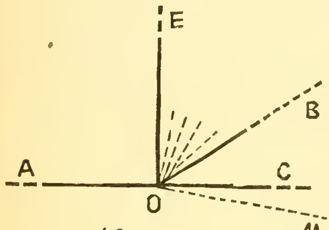
87. **דרייאונג ארום אן אקס.** זיינען א פאר פארשיידנארטיגע זייטן שוין צונויפגעלייגט (לאגע III און IV פיג. 15) און צונויפגעשמאלצן אין איין גראדער (OB), דאן דרייען מיר איינע פון די פלאטעס (אדער ביידע) ארום דער גראדער ווי ארום אן אקס (ווי א טיר אויף אירע שארנירן, אדער א בלאט אין א בוך) ביז די אויבערשטע פלאטע וועט זיך איבערקערן און די צווייטע פאר **פארשיידנארטיגע זייטן וועלן זיך דערבײדעקן**, אויב די ווינקלען זיינען גלייך. די ווייזערלאך אויף דער פיגור 15 דערקלערן ביידע דרייאונגען: פון דער לאגע II צו דער לאגע III קומט פאר א דרייאונג ארום א פונקט (O), און פון דער לאגע III צו דער לאגע IV—א דרייאונג ארום אן אקס (OE).

מיר וואלטן נאך געקענט ארויפלייגן די ווינקלען איינעם אויפן אנדערן, שארנדיג אין א דרייאונג די אויבערשטע פלאטע איבער דער אונטערשטער, ביז די ווינקלען וואלטן זיך צופעליג צונויפגעלייגט, עס איז אבער א סך שווערער איינפאסן מיט איין מאל אלע טיילן פון די ווינקלען איינעם מיטן אנדערן.

88. דורך וועלכער באוועגונג מיר זאלן ניט דורכפירן די צונויפלייגונג פון די זייטן פון די ווינקלען, דארפן מיר זיין זיכער, אז ביי דער באוועגונג האט דער באוועגטער ווינקל (ווי בכלל א פיגור) ניט געענדערט זיין גרויס (אדער פארם). דעריבער נעמען מיר אן א נייע **אקסיאמע: פון איבערטראגן א פיגור פון איין ארט אין רוים אויף אן אנדערן ענדערן זיך ניט סיי די רוים פון די טיילן פון דער פיגור, סיי זייער געגנזייטיגע לאגע.**

89. **באשטימונגען. א)** צוויי ווינקלען, וואס האבן א שותפותדיגן שפיצפונקט און א שותפותדיגע זייט הייסן **בײווינקלען**, ווייל זיי ליגן איינער ביי דעם אנדערן. למשל די ווינקלען AOM און MOE אויף דער פיג. 14.

ב) וועלן בײדע בײווינקלען זײן גלײך צווישן זיך, דאַן קען יעדער פון זײ באַטראַכט ווערן אַלס אַ העלפט פון גאַנצן ווינקל (AOE פיג. 14), וועלכן זײער סומע בילדעט. דער שותּפותדיגער שטראַל (OM פיג. 14.) טײלט, הײסט עס, דעם גאַנצן ווינקל אין צוויי גלײכע טײלן. אַ שטראַל, וואָס טײלט אַ ווינקל אויף דער העלפט, הײסט **ווינקלהאַלבירנדיגע** אָדער **ביסעקטריסע** ד. ה. צווײשנײדנדיגע.



פיג. 16.

ג) צוויי ווינקלען (AOB און BOC פיג. 16.), וואָס האָבן אַ שותּפותדיגן שפּיץ־פונקט, אַ שותּפותדיגע זײט און וואָס זײערע ניט שותּפותדיגע זײטן זײנען אויסגעשטרעקט אויף אײן גראָדער, הײסן **שטרעקווינקלען.** יעדער פון בײדע שטרעקווינקלען הײסט מיט־געשטרעקט צום צווײטן: ווינקל AOB איז מיטגעשטרעקט צום ווינקל BOC (פיג. 16.) און פאַרקערט. פון דער באַש־טימונג זעהען מיר, אַז שטרעקווינקלען זײנען במילא בײווינקלען. עס איז אויך קלאָר פון דער צײכענונג, אַז צונויפגעלײגט איז אײן פּאָר פאַרשײדנאַרטיגע זײטן פון די ווינקלען, די צווײטע פּאָר איז אויסגעשטרעקט אויף אײן גראָדער. אויסציהענדיג וועלכע עס איז זײט פון אַ געגעבענעם ווינקל (למשל די זײט AO פון ווינקל AOB פיג. 16.) פון שפּיצפונקט אַהין אין אנטקעגנדיגער ריכטונג, וועלן מיר באַקומען אַ ווינקל, וואָס איז מיטגעשטרעקט צום געגע־בענעם ווינקל.

ד) יעדער פון בײדע שטרעקווינקלען, וואָס זײנען גלײך צווישן זיך, הײסט רעכטער ווינקל, אָדער **רעכטווינקל** (24) למשל די ווינקלען AOE און EOC (פיג. 16.) זײער שותּפותדיגע זײט הײסט **ווילרעכטע** צו יעדער פון די איבעריגע צוויי, (אָדער צו דער גאַנצער גראָ־דער, וואָס זײ בילדן) אין געגעבענעם פונקט (למשל O).

ה) צוויי גראָדע הײסן **ווילרעכט** אײנע צו דער צווײטער ווען זײ שנײדן זיך (66) מיט אַ רעכטווינקל. דער שניטפונקט הײסט **פוספונקט** פון דער ווילרעכטער (פיג. 16.) די ווילרעכטקײט פון צוויי גראָדע ווערט באַצײכנט מיטן סימן „⊥"; EO⊥AC הײסט: EO שטײט ווילרעכט צו AC; אנשטאַט ווילרעכטע ווערט אויך באַנוצט דער וואָרט **פּערפּענדיקולאַרע**: EO איז פּערפּענדיקולאַר צו AC. מיר זאָגן „ווײל־רעכטע" ווײל די גראָדע שטײט מיט אַ רעכטן ווינקל ווי אַ **ווײל**. שנײדן אַ גראָדע אין איר אַ געגעבענעם פונקט דורך אַ צווײטער גראָדער מיט אַ

רעכטווינקל הייסט: **אַ װעקשטעלן אַ זײַלרעכטע צו דער גראָדער אין איר געגעבענעם פּונקט.** איז דער פּונקט אַ מיטנפּונקט פֿון אַ שטרעקע, דאַן הייסט די זײַלרעכטע **מיטנזײַלרעכטע** צו דער שטרעקע.

ווען די שותפֿותדיגע זײַט פֿון שטרעקווינקלען ניט שטיין זײַלרעכט (פּערפּענדיקולאַר) צו די איבעריגע, דאַן הייסט זי גענייגט צו זיי. OB איז גענייגט צו AC (פֿיג. 16).

ו) צוויי גראָדע הייסן **גענייגט** איינע צו דער אַנדערער, ווען זיי שנײַדן זיך ניט מיט אַ רעכטן ווינקל. דער שניטפּונקט הייסט אין דעם פֿאַל **פֿוספּונקט** פֿון דער **גענייגטער**. די מעגלאַכקייט צו בילדן צוויי רעכטווינקלען פֿון שטרעקווינקלען ווילן מיר באַלד באַהאַנדלען.

90. **לערזאַץ (טעאָרעמע): אין יעדן פּונקט פֿון אַ גראָדער, פֿון יעדער זײַט איר, קען מען אוועקשטעלן אַ זײַלרעכטע צו איר אין ניט מער ווי איינע.** (פֿיג. 16)

פֿאַראויסבאַדונג: AC אַ גראָדע און 0—אירער אַ פּונקט

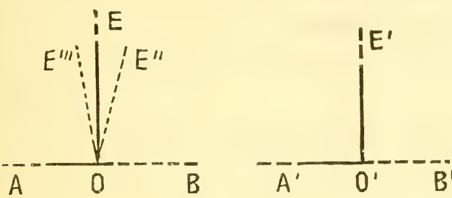
פֿעסטשטעלונג: 1) אין פּונקט 0 קען אַוועקגעשטעלט ווערן פֿון יעדער זײַט פֿון AC (אויבן און אונטן) אַ זײַלרעכטע און 2) ניט מער ווי איינע.

באַווײַז: דורכן פּונקט 0 ציִען מיר אַ יועלכע עס איז גענייגטע, למשל OB וועלכע בילדעט מיט AC צוויי שטרעקווינקלען (89 ג), וואָס זײַנען בכלל געדרט אומגלײַך צווישן זיך. זאָל זײַן למשל ווינקל BOC קלענער פֿון ווינקל AOC. שטעלן מיר זיך פֿאָר אַז די גענייגטע (89 ד) OB ווערט געדרייט אַרום דעם פּונקט 0 אַזוי, אַז ווינקל BOC ווערט וואָס אַ מאָל און ביסלאַכווײַז גרעסער און ווינקל AOB קלענער. ווילן מיר נאָך אָננעמען אַז די פֿאַרענדערונג פֿון די גרייסן פֿון ביידע ווינקלען קומט פֿאָר אומאויפֿהערלאַך און אויף זייער אַ קליינע גרייס, (ד. ה. מיר דרייען OB די גאַנצע צייט און ווימעגלאַך לאַנגזאַם — און דאָס קענען מיר מאַכן) און שטיצנדיג זיך אויפֿן גרונדזאַץ (57), זאָגן מיר: עס מוז אָנקומען אַזאַ מאָמענט, אַזאַ לאַגע, ווען ביידע שטרעקווינקלען ווען זיך אויסגלײַכן, ד. ה. יעדער וועט ווערן אַ רעכטער און OB אַ זײַלרעכטע — הייסט עס, אַז דער ערשטער טייל פֿון דער פֿעסטשטעלונג איז באַוויזן; דערוועלכער גרונדזאַץ זאָגט, אַז ס'איז מעגלאַך נאָר בײַ איין מאָמענט, בײַ איין לאַגע, און ניט מער — הייסט עס, אַז דער צווייטער טייל פֿון דער פֿעסטשטעלונג איז דערמיט אויך באַוויזן.

91. דער אָפּשטאַמענדיגער נעגאַטיוו-פֿאַרקערטער זאַץ פֿון דעם ערשטבאַווײַזענעם איז אויך ריכטיג. לאָמיר אים פֿאָרמולירן: קען מען

אַוועקשטעלן אין איין פונקט פֿון אַ ליניע מער ווי איין זײַלרעכטע צו איר (למשל צוויי) דאַן איז די ליניע ניט קיין גראָדע (ד. ה. אַ געבראָכענע אָדער קרומע). אין דער אמתן: צו אַ געבראָכענער ליניע קען מען אַוועקשטעלן (אין שותפותדיגן פונקט פון צוויי שטרעקעס), צוויי זײַלרעכטע צו יעדערער פון זיי (מאַך אַ צייכענונג!). דער באַווײַזענער לערזאַץ (88) פֿאַרהעלפֿט אונז צו באַ-ווייזן נאָך אַזאַ:

92. **לערזאַץ (טעאָרעמע): אַלע רעכטע ווינקלען זײַנען צווישן זיך גלײַך.** (83).



פיג. 17.

פֿאָראויסבאַדונג: די ווינקלען AOE און A'O'E' זײַנען רעכטע, ד. ה.: 1) $EO \perp AO$; 2) $E'O' \perp A'O'$.

פֿעסטשטעלונג: ווינקל AOE איז גלײַך דעם ווינקל A'O'E'.

באַווײַז: לאָמיר אַרויפֿלייגן ווינקל A'O'E' אויף AOE אַזוי אַז די שפּיצן O און O' און די זײַטן OA און O'A' זאָלן זיך דעקן. ווען דערבײַ O'E' ניט דעקן OE, דאַן וועט זי מוזן אָננעמען איינע פֿון די בײַדע לאַגעס: EO'' אָדער OE''', סײַ אין דער ערשטער, סײַ אין דער צווייטער לאַגע, וועט אויסקומען אַז צו איין און דערזעלבער גראָדער AO אין איין פונקט אירן O קען מען אַוועקשטעלן צוויי זיילרעכטע: OE און נאָך OE'' (אָדער OE'''), ווײַל ווינקל AOE'' (אָדער AOE''') איז דאָך דערזעלבער ווינקל A'O'E' נאָר אַרויפֿגעלייגט אויף ווינקל AOE. צוויי זיילרעכטע צו אַ גראָדער אין איין פונקט אירן קען מען ניט אַוועקשטעלן און דעריבער קען ניט O'E' ביים אַרויפֿלייגן פֿאַרנעמען אַ וועלכע עס איז אַנדערע לאַגע אויסער ווי OE ד. ה. זי וועט זי דעקן און די ווינקלען וועלן זײַן גלײַך (83), און דאָס האָבן מיר געדאַרפֿט באַווייזן.

מאַך פֿון (92) אַן אָפּשטאַמענדיגן פֿאַרקערטן זאַץ און באַווײַז זײַן פּשוטע ניטריכטיגקייט (89 ב).

93. פֿון דעם ערשט באַווײַזענעם לערזאַץ (89) זעהען מיר, אַז אַ רעכ-טער ווינקל איז אַן אומפֿאַרענדערלאַכע, **אַ שטענדיגע**, גרויס וואָס ענדערט זיך ניט וואו, ווער און ווען מ'זאָל אים ניט אָנצייכענען, נאָר ריכטיג אָנצייכענען. דעריבער ווערט אַ רעכטער ווינקל אָנגענומען אַלס אַ מאָס, מיט וועלכער מיר מעסטן אַלע אַנדערע ווינקלען. די גרויס פֿון אַ רעכטן ווינקל, ד. ה. די נייגונג צווישן זײַנע זײַטן, ווערט באַצייכנט מיטן אות d (פֿון וואָרט droit, וואָס באַדײַט אַ רעכטער).

א) באַשטימונג: א ווינקל וואָס איז קלענער פון אַ רעכטן הייסט שפיציגער ווינקל, איז ער גרעסער פון אַ רעכטן, דאַן הייסט ער טעמפער ווינקל. אין פיג. 16 איז ווינקל AOB אַ טעמפער, ווינקל BOC — אַ שפיציגער. צוויי שפיציגע ווינקלען אָדער צוויי טעמפע הייסן איינאַרטיגע, אַ טעמפער מיט אַ שפיציגן — פאַרשיידנאַרטיגע. אין באַלדיגן לערזאַץ וועלן מיר אויסרעכענען די סומע פון צוויי שטרעקווינקלען, אויסגעדריקט אין רעכטווינקלען.

94. **לערזאַץ (טעאָרעמע): די סומע פון צוויי שטרעקווינקלען באַטרעפט צוויי רעכטע ווינקלען.** (ז. פיג. 16.)

פאָראויסבאַדונג: די ווינקלען AOB און BOC זיינען שטרעקווינקלען (87 ג).

פעסטשטעלונג: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2d$

באַווייז: צום באַווייזן שטעלן מיר אוועק אין פונקט O אַ זיילרעכטע צו דער גראָדער AC (88) דאַן איז $\sphericalangle EOC = d$ (ב $\sphericalangle AOE = d$ (א

1) $AOB + BOC = AOE + EOB + BOC$ (52)

2) $AOE + EOB + BOC = AOE + EOC$ (52)

3) $AOE + EOC = d + d = 2d$ (א,ב)

4) $AOB + BOC = 2d$ (47)

און דאָס האָבן מיר געדאַרפט באַווייזן.

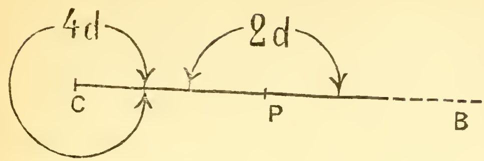
באַמערקונג: די זיילרעכטע EO, וואָס מיר האָבן אוועקגעשטעלט האָט די סומע פון די געגעבענע שטרעקווינקלען ניט געענדערט און האָט ניט געקענט אריינברענגען וועלכע עס איז פאַלשקייט אין באַווייז. מיר וועלן שפּעטער אָפט אויסנוצן נייע ליניעס, נייע פיגורן, וועלכע מיר וועלן צוציכענען צו די געגעבענע, כדי זיך צו פאַרהעלפן ביי דער לייזונג פון אַ געאָמעטרישער פראַגע. אזעלכע ליניעס הייסן **הילפליניעס** (הילפס-פיגורן).

95. **שלוסזאַצן** (פון 94 — אַ): זיינען צוויי ווינקלען גלייך צווישן זיך דאַן זיינען זייערע מיטגעשטרעקטע ווינקלען אויך גלייך צווישן זיך (51)

ב) איז איינער פון די שטרעקווינקלען א רעכטער, דאַן איז דער צווייטער אויך א רעכטער $(2d - d = d)$.

96. **שלוסזאַצן** (פון 94 — א) **די סומע פון אַלע ווינקלען וואָס האָבן אַ שותּפותדיגן שפּיץ און ליגן פון איין זייט פון א גראָדער, באַטרעפט צוויי רעכטע ווינקלען,** ווייל מען קען די גאנצע גרופּע ווינקלען שפּאַלטן אין צוויי שטרעקווינקלען.

ב) יעדער פונקט פון א גראדער קען מען באטראכטן אלס שפּיצפונקט



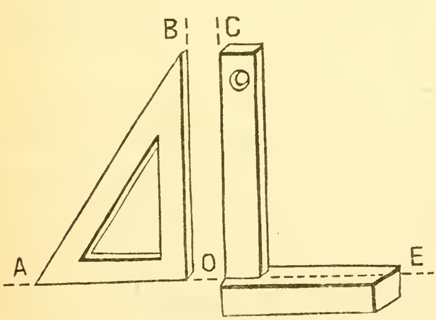
פיג. 18.

פון א ווינקל, וואס זיינע זייטן ליגן אויסגעשטרעקט אויף איין גראָדער און וועלכער באַטרעפט דעריבער צוויי רעכטע ווינקלען (ז. פיג 18 פונקט P)

97. **שלוסזאַצן:** [פון 94) **א: די סומע פון אַלע ווינקלען, וואָס ליגן אַרום אַ שותּפותדיגן שפּיצפּונקט, באַטרעפט פיר רעכטע ווינקלען;** וועלכער עס איז שטראַל, וואָס ווערט פאַרלײַנגערט אין אַנטקעגנדיגער ריכטונג, ווערט בילדן צוויי גרויפּעס ווינקלען, וועלכע מיר האָבן איצט ערשט באַהאַנדלט אין (96־**א**).

ב) יעדער ארויסגאַנגספּונקט פון אַ שטראַל קען מען באַטראַכטן אַלס אַ שפּיצפּונקט פון אַ ווינקל, וואָס זיינע זייטן האָבן זיך צונויפגעשמאָלצן, און וועלכער באַטרעפט דעריבער פיר רעכטע ווינקלען (אָדער נול, אויב מיר וועלן אומבייטן די נעמען פון די זייטן).

98. **אַ**זוי ווי אַרום אַ פּונקט לייגט זיך אויס אַ פולער ווינקל (31) ד. ה. 360^0 און דאָס מאַכט אויס 4 רעכטע ווינקלען (97) הייסט עס: **אַ רעכטווינקל אַנטהאַלט** 90^0. צום צייכענען א רעכטן ווינקל, אָדער צום אוועקשטעלן אַ זיילרעכטע, ווערט באַנוצט אַן אינסטרומענט, וואָס הייסט רעכטווינקל, אָדער ווי בעל־מלאכה'עס זאָגן „**ווינקל**" (פיג. 19). צוויי זיינע קאַנטן בילדן אַ רעכטן ווינקל. צום אוועקשטעלן אַ זיילרעכטע אין א געגעבענעם פּונקט פון א גראָדער לייגט מען צונויף איין קאַנט מיט דער גראָדער אַזוי אַז דער שפּיץ פון רעכטן ווינקל זאָל אויסקומען אין דעם געגעבענעם פּונקט און מען ציהט אַ ליניע לײַנגאויס דעם צווייטן קאַנט.



פיג. 19.

99. **לערזאַץ** (פאַרקערטער צו 94). **באַטרעפט די סומע פון צוויי באַזונדערע ווינקלען צוויי רעכטע, דאַן קען מען פון זיי בילדן שטרעקווינקלען.** ד. ה. 1.) וועלן מיר צונויפלייגן זייערע שפּיצפּונקטן און אַ פּאָר (פאַרשיידנאַרטיגע) זייטן, דאַן וועלן זיך די איבעריגע צוויי זייטן אויסשטרעקן אויף איין גראָדער,

און 2) : וועלן מיר צונויפלייגן זייערע שפּיצפּונקטן און אויסשטרעקן אַ פּאָר (פאַרשיידנאַרטיגע) זייטן איין גראָדער, דאַן וועלן זיך די איבעריגע צוויי זייטן אויך צונויפלייגן. לאָמיר באַווייזן דאָס ערשטע (פיג. 16.) :

פאַראויסבאַדינג: $\sphericalangle AOB + BOC = 2d$ און די שפּיצפּונקטן און אַ פּאָר זייטן (OB) זיינען צונויפגעלייגט;

פעסטשטעלונג: די ליניע AOC איז אַ גראָדע.

באַווייז: **צום באַווייז לאָמיר משער זיין דעם געגנזאַץ פון דער פעסטשטעלונג**, ד. ה. אַז AOC איז ניט קיין גראָדע, נאָר למשל אַ געבראָכענע! (פאַרוואָס רעדן מיר ניט וועגן אַ קרומער? 16) אויב אַזוי, קען מען פאַרלענגערן די זייט AO פון איינעם פון די ווינקלען אין אנטקעגנדיגער ריכטונג און מיר וועלן באַקומען אַ גראָדע AOM (89—ג). דער ווינקל BOM וועט זיין מיטגעשטרעקט צו AOB, ד. ה.:

$AOB + BOM = 2d$; נעמענדיג אין באַטראַכט דעם פאָראויסבאַדונג, וועלן מיר באַקומען $BOA + BOC = AOB + BOM$ (47) און ווייטער $BOC = BOM$ (51). דאָס איז אָבער אוממעגלאך: BOC איז נאָר אַ טייל פון BOM (46). **אונזער השערה האָט אונז געבראַכט צו אַן אוממעגלאַכן שלוס, צו אַן אַבסורד און דעריבער וואַרפן מיר די השערה אָפּ און נעמען אָן די פעסטשטעלונג**, ד. ה. אַז AOC איז יע אַ גראָדע.

100. **באַווייז דורכן היפוך.** איינגנטלאך האָבן מיר איצט ערשט ניט באוויזן גלייך, אז AOC איז א גראָדע; **מיר האָבן נאָר באַוויזן, אַז די השערה**, אז זי איז גישט קיין גראָדע, **ברייגנגט אונז צו אן אומזיניגן פועל־יוצא, צו אן אבסורד, און דעריבער וואַרפן מיר די השערה אָפּ.** אזא שטייגער צו באַווייזן הייסט **באַווייזן דורכן היפוך**, ווייל מיר פּראָבירן אָננעמען דעם היפוך פון דער פעסטשטעלונג און וואַרפן אים אָפּ. פאַרוואָס? ווייל מיר גלייבן, אז דער אומזין פון פועל יוצא קומט ארויס ניט צוליב אונזער אומקענטעניש צו דענקען, נאָר צוליב דער פאַלשער השערה. אזא שטייגער צו באווייזן עפּעס הייסט אויך **דערפירן (אַ השערה) ביזן אבסורד.**

101. **באַשטימונג: צוויי ווינקלען וואָס האָבן אַ שותפות־דיגן שפּיצפּונקט און וואָס זייערע זייטן ליגן פאָרווייז אויף איין גראָדער, הייסן שערווינקלען.** למשל די ווינקלען AOE און COB (פיג. 14); די ווינקלען AOC און BOE זיינען אויך

שערווינקלען, ווייל COE און AOB זיינען גראָדע. יעדער פון די שערווינקלען הייסט ש ע ר ו ו י נ ק ל ד י ג צום צווייטן. די גרוים פון שערווינקלען באהאנדלט דער באלדיגער לערזאין.

102. לערזאַץ: שערווינקלען זיינען גלייך צווישן זיך (פיג. 14)

פאראויסבאדונג: AOB און COE זיינען גראדע ליניעס.

פעסטשטעלונג: $\sphericalangle AOE = \sphericalangle COB$

באווייז: 1) $AOE+EOB=2d$; 2) $COB+BOE=2d$; (ג=89) (94)
3) $AOE+EOB=COB+EOB$ (47); $AOE=OBC$ (51)

און דאס האבן מיר געדאַרפט באווייזן.

103. לערזאַץ (פאַרקערטער צו 103). זיינען צוויי ווינקלען גלייך, דאַן קען מען פון זיי בילדן שערווינקלען, ד. ה. אויב

מיר וועלן צונויפלייגן זייערע שפּיצפּונקטן און איינשטעלן איין פּאָר איינאַרטיגע זייטן אויף איין גראָדער, דאַן וועט זיך די צווייטע פּאָר (איינאַרטיגע) זייטן אויך אויסלייגן אויף איין גראדער. (פיג. 14)

פאראויסבאדונג: $AOE=\sphericalangle COB$ און CO און OE ליגן אויף איין גראָדער;

פעסטשטעלונג: AOB איז אויך אַ גראָדע.

באווייז (דורכן היפוך): זאל AOB ניט זיין קיין גראָדע, דאן וועט עס זיין וועלכע עס איז אנדערע, למשל AOK, און מיר וועלן האָבן נייע שערווינקלען AOE און COK; 1) $COK=AOE$ (102, 103); 2) $COK=COB$ (פּאָראויסב. און 47). דאס איז אבער אן אבסורד (46). ווייטער גייען מיר מיטן זעלבן געדאַנקענגאַנג ווי אין (100).

104. אויפגאַבעס. אויפשטעלונגען.

א) צו אַ געגעבענער גראָדער אַוועקשטעלן אַ זיילרעכטע אין אירן אַ געגעבענעם פונקט, באַנוצנדיג אַ ווינקל (פיג. 18).

ב) אָנצייכענען אַ שפּיציגן, אַ טעמפּן ווינקל.

ג) געגעבן איז אַ ווינקל. אויפשטעלן זיין מיטגעשטרעקטן, זיין שערווינקל.

ד) אַ ווינקל האָט פון ביידע זייטן צו ביי ווינקל (89א). אויפשטעלן אַ ווינקל, וואָס זאָל זיין גלייך 1.) דער סומע פון אַלע דריי; 2.) דער דיפערענץ צווישן דער סומע פון אַלע דריי און איינעם (אָדער צוויי) פון זיי.

ה) געגעבן איז אַ ווינקל פון 160^0; אויפשטעלן אַ ווינקל פון 20^0.

105. אויפגאַבעס. באווייזן.

א) אַז די ביסעקטריסעס פון צוויי שטרעקווינקלען שטייען זיילרעכט

איינע צו דער אנדערער (51—94).

ב) אַז די ביסעקטריסעם פון צוויי שערווינקלען ליגן ביידע אויף איין גראָ־דער. (100)

ג) דורכן שפּיץ פון אַ רעכטן ווינקל AOB ציהט זיך אַ גראָדע MOE אויסנווייניג פון ווינקל. באווייזן אַז די סומע פון די צוויי נייבאקומענע ווינק־לען באטרעפט d; ווי וועט זיך ענדערן די אויפגאבע, אויב MOE ציהט זיך אינעווייניג אין ווינקל AOB?

ד) אין שפּיץ פון אַ שפּיציגן ווינקל AOB שטייען צוויי ווילרעכטע צו זיינע זייטן: $OE \perp OB$ און $MO \perp OA$; באווייז, אַז דער ווינקל MOE איז גלייך דעם ווינקל AOB (51—92—45). צו קען דאָס גילטן פאַר אַלע אַזעלכע פיגורן? מאך אַ לערזאַץ דערפון, באטראכטנדיג וועלכע זייטן און ווי שטייען ווילרעכט איינע צו די אנדערע.

ה) אין שפּיצפונקט פון אַ טעמפּן ווינקל AOB שטייען פון אינעווייניג צוויי ווילרעכטע צו זיינע זייטן: $OE \perp CB$ און $OM \perp OA$; באווייז, אַז די ווינקלען MOB און AOE זיינען גלייך צווישן זיך; באווייז אַז $2d = EOM + AOB$ (ציה אויס די זייט AO נאכן פונקט O, זעה פריערדיגע אויפגאבע). צו קען מען ניט פון די אויפגאבעס (ד) און (ה) פארמולירן אין לערזאַץ? צו וועט עס גילטן פאַר דעם פאַל, ווען די ווילרעכטע שטייען פון אויסנווייניג?

ו) דורכן שפּיצפונקט O פון אַ ווינקל AOB ציהט זיך זיין ביסעקטריסע OM און נאך אַ גראָדע OC וואָס גייט פון אינעווייניג (2. אויסנווייניג). באווייזן אַז MOC איז גלייך דער העלפט פון דער דיפערענץ (2. פון דער סומע) פון די ווינקלען AOC און BOC?

106. אויפגאבעס. אויסרעכענונג.

א) געגעבן זיינען 2 שטרעקווינקלען. ווי גרויס איז יעדער פון זיי, ווען איינער איז: 1.) — גלייך $^3/_4 d$; 2.)—גלייך 72^0; 3.)— גלייך $^3/_4$ פון צווייטן; 4.)— מיט $^2/_5 d$ גרעסער פון צווייטן; 5.)—מיט 40^0 קלענער פון צווייטן; 6.)—3 מאָל אַזוי גרויס ווי דער צווייטער?

ב) זעה די אויפגאבע 105—ג. די גראָדע MOE ציהט זיך פון אויסנווי־ניג. איינער פון די נייבאקומענע ווינקלען איז: 1.)—גלייך $^1/_4 d$; 2.)—גלייך 48^0; 3.)—4 מאָל אַזוי גרויס ווי דער צווייטער; 4.)—אַ זעקסטל פון צווייטן; 5.)—$^2/_3$ פון ווינקל AOB; 6.)—מיט 20^0 גרעסער פון AOB. ווי גרויס איז יעדער פון די נייבאקומענע ווינקלען?

ג) זעה די אויפגאבע 105—ג. ווען די גראָדע MOE ציהט זיך אינעווייניג פון ווינקל AOB אַזוי אַז מיר באקומען 3 בייווינקלען AOM, MOB און

BOE; ווי גרויס איז יעדער פון זיי, ווען 1.)—דער מיטלסטער איז גלייך $^4/_5d$; 2.) איין זייטיגער איז גלייך 30°; 3.)—איין זייטיגער איז 4 מאל אזוי גרויס ווי דער צווייטער; 4.)—איין זייטיגער איז $^5/_4$ פון מיטלסטן; 5.) די סומע פון ביידע זייטיגע באטרעפט $^8/_5d$; 6.)—די דיפערענץ פון ביידע זייטיגע באטרעפט $^4/_3$ פון מיטלסטן?

ד) זעה די אויפגאבע 105—ד. ווי גרויס איז יעדער פון די דריי ביווינקלען: 1.) ווען—דער מיטלסטער באטרעפט א העלפט פון א זייטיגן; 2.)—פארקערט; 3.)—דער מיטלסטער באטרעפט א העלפט פון דער סומע פון די זייטיגע; 4.)—פארקערט; 5.)—דער מיטלסטער באטרעפט $^3/_4$ פון דער סומע פון די זייטיגע; 6.)—פארקערט; 7.)—די סומע פון אלע דריי באטרעפט 150°; 8.)—די דיפערענץ צווישן דעם מיטלסטן און א זייטיגן באטרעפט 30°; 9.)—פארקערט;

ה) זעה די אויפגאבע 106 ה. אויסרעכענען די גרויס פון ווינקל AOB און פון יעדן פון די ווינקלען AOE, EOM און MOB, ווען: 1.)—AOB באטרעפט $^8/_5d$; 2.)—EOM באטרעפט 40°; 3.)—AOE באטרעפט $^5/_8d$; 4.)—AOB—FOM=30°; 5.)—AOE—EOM=$^1/_8d$; 6.)—EOM—AOE=10°; 7.)—AOE=$^1/_4$AOB; 8.)—AOE=$^1/_5$EOM; 9.)—EOM=$^1/_6$AOE?

ו) פון איין זייט פון א גראדער ארום איין פונקט איז ליגן 6 (8, 10, 15) גלייכע ווינקלען. ווי גרויס איז יעדער פון זיי אין חלקים פון d? אין גראדן?

ז) ארום א פונקט ליגן 5 ווינקלען אזוי, אז אנהויבנדיג פון ערשטן איז יעדער ווייטערדיגער גלייך דער סומע פון די פריהערדיגע. ווי גרויס איז יעדער?

ח) צוויי גראדע AB און CE שניידן זיך אין פונקט O (פיג. 14). ווי גרויס איז יעדער פון די 4 אנטשטאנענע ווינקלען, אויב: 1.)—AOE—COB=$^3/_4d$; 2.)—AOC+COB+BOE=300°; 3.)—AOC+BOE—COB=$^3/_2d$; 4.)—AOC—(AOE+COB)=10°; 5.)—AOE+BOC=AOC; 6.)—AOC—COB=$^1/_4$AOE; 7.)—AOC+COB=3 AOE.

ט) ווי גרויס איז יעדער פון צוויי ביווינקלען AOB און BOC, ווען זייער סומע באטרעפט $^{14}/_5d$ און אויב OE, די אנטקעגנדיגע פארלייינגערונג פון שטראל פון AO האקט דעם ווינקל BOC אויף דער העלפט?

קאפיטל ג.

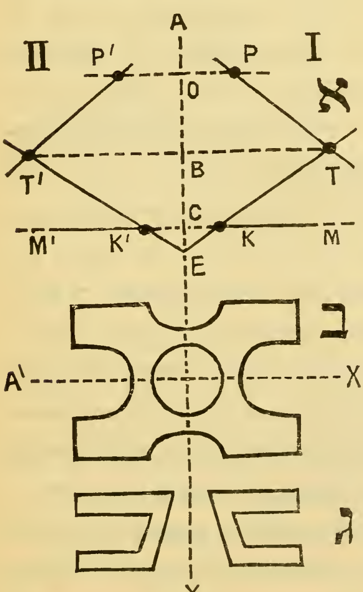
סימעטריע. (שפיגלדיגקייט)

I

אַקסיאַלע סימעטריע

107. ביים צונויפלייגן די זייטן פון צוויי ווינקלען דורך דרייאונג אַרום אַן אַקס, האָבן מיר געזעהן, אַז די זייטן וועלן זיך דעקן, אויב די ווינקלען זיינען גלייך (87). עס איז קלאָר, אַז ביים צונויפלייגן די זייטן, וועט יעדער פונקט פון דער זייט OA (פיג. 15 III) דעקן אַ געוויסן פונקט פון דער זייט OM. אַט אַזאַ לאַגע פון צוויי פונקטן, אדער ליניעס, וועלכע דעקן זיך ביים אומדרייען (אומקנייטשן) זייער פלאַטע אַרום אַ גראָדער (OE פיג. 15) שאַפט צוזאַמען מיט דער גראָדער—דער אַקס—אַ פיגור, וועלכע מאַכט אונז קלאָר אַ סך אייגנשאַפטן פון פיגורן בכלל. לאָמיר עס נעמער באַהאַנדלען.

108. **באַשטימונג: צוויי פונקטן, אָדער ליניעס, הייסן סימעטריש איינער מיטן אַנדערן צו אַ גראָדער, אויב זיי דעקן זיך** (גיסן זיך צונויף) **ביים אומקנייטשן** (אומדרייען) **זייער פלאַטע אַרום דער גראָדער וועלכע הייסט די סימעטריאַקס פון די פונקטן, אָדער ליניעס.** די פונקטן P און P′, למשל, זיינען סימעטריש איינער מיטן אַנדערן צו דער אַקס AX פיג. 20. יעדער פון די צוויי סימעטרישע פונקטן הייסט אויך שפיגלפונקט פון צווייטן, ווייל זיי ליגן איינער אַנטקעגן דעם אַנדערן, ווי אַ געגנשטאַנד און זיין אָפּבילדונג אין אַ שפיגל.



פיג. 20.

109. לאָמיר אָנצייכענען אויף אַ פלאַטע, למשל אויף דער זייטל פון בוך, אַ גראָדע AX (פיג. 20), אָנמערקן פון איין זייט פון איר (רעכטס) עטלאַכע פונקטן P, T, K און אומקנייטשן אַט דעם (רעכטן) טייל פון דער פלאַטע אַרום דער גראָדער AX (דרייען אַרום איר ווי אַרום אַן אַקס), ביז דער (רעכטער) טייל פון דער פלאַטע

וועט דעקן דעם צווייטן (לינקן). יעדער פון די אָנגענומענע פונקטן וועט דעקן ביים אומקנייטשן א געוויסן אָרט (אַ פונקט) פון דער צווייטער זייט, ד. ה. ער וועט שאפן **א** סימעטרישן פונקט מיט אים. לאמיר אנמערקן די סימעטרישע פונקטן P′, T′ און K′. איצט וועלן מיר פאַנאנדערקנייטשן דעם אומגעדרייטן טייל פון דער פלאטע אין זיין פריהערדיגע לאגע און פאַרבינדן דורך גראדע סיי די פונקטן, וואס ליגן פון איין זייט אקס, סיי יעדן פונקט מיט זיין סימעטרישן (מיט זיין שפיגלפונקט, זעה די גראדע PT און P′T′, KT און KT′ ווי אויך PP′ א. א. וו. פיג. 20.)

110 פון דעם אומדרייען איז קלאָר, אז:
א) די סימעטריאקס ליגט צווישן די שפיגלפונקטן, אדער די סימעטרישע ליניעס (ווייל די סימעטרישע פונקטן ליגן פון פארשיידענע זייטן אירע) און טיילט איין די פלאטע, אויף וועלכער זי ליגט, אין צוויי טיילן (I און II פיג. 20), וואס גרעניצן זיך אפ איינער פון צווייטן ביי דער אקס און ציהען זיך אומענדלאך אין רוים פון ביידע אירע זייטן.

ב) יעדער פונקט, וואס ליגט אויסער דער אַקס, האט צו דער געגעבענער אקס א שפיגלפונקט פון איר צווייטער זייט און ניט מער ווי איינעם. איין שפיגלפונקט מוז ער האבן, ווייל ער מוז דאך פארנעמען א וועלכע עס איז לאגע פון דער צווייטער זייט ביים אומדרייען זיין טייל פון דער פלאטע; צוויי (אָדער מער) שפיגלפונקטן קען ער ניט האָבן, ווייל די ביידע (אדער מער) שפיגלפונקטן וואלטן געדאַרפט דעקן אים איינעם ביים ארויפלייגן זייער טייל פון דער פלאַטע אויף זיין טייל און זיך ווידער פאנאנדערגיין ביים פאנאנדערקנייטשן די פלאטע, ד. ה. ביטן זייער געגנזייטיגע לאגע פון דער באוועגונג (דער דרייאונג),—דאס קען אבער ניט זיין (88).

ג) **די** פונקטן פון דער אקס אליין בלייבן **אויף** זייער אָרט, ווען ניט וואלט די אקס געוועזן אומבאשטימט. יעדן פונקט פון דער אקס קענען מיר באטראכטן פאַר צוויי שוין גערעקטע שפיגלפונקטן, ש״ין צונויפגעלייגטע אן א דרייאונג, אויפן זעלבן ארט פון דער אקס, ד. ה. מיר נעמען אן, אז **יעדער פונקט פון דער אַקס איז סימעטריש מיט זיך אַליין.**

ד) אנשטאט דער געגעבענער אַקס AX וואלטן מיר געקענט נעמען אויף דערזעלבער פלאטע א וועלכע עס איז אנדערע, ווייל מיר קענען קנייטשן די פלאטע ארום וועלכער גראדער מיר ווילן, ד. ה: **צו א געגעבענעם פונקט קען מען נעמען אומענדלאך פיל אַקסן** און געפינען צו יעדערער זיין שפיגלפונקט. וועט די אַקס זיך ציהען דורכן פונקט אליין, דאן

ווערט דער פונקט סימעטריש מיט זיך אליין און האט ניט קיין שפיגלפונקט אויף אן אנדער ארט (ג).

111. פון דער באשטימונג וועגן סימעטרישע פונקטן, ווי אויך פון דעם, וואס מיר האבן געזאגט אין (110), מאכן מיר באלד א רייע זאצן, בנוגע די סימעטריע פון ליניעס, וואס ציהען זיך דורך סימעטרישע פונקטן, און פארקערט: ווי אזוי סימעטרישע ליניעס באשטימען די סימעטריע פון פונקטן.

א*) שניידן זיך צוויי סימעטרישע גראדע (66), דאן ליגט זייער שניטפונקט אויף זייער סימעטריאקס, ווען ניט וואלט זייער שניטפונקט, ליגנדיג אויסער דער אקס פון איין זייט אירער, געהאט א סימעטרישן מיט אים צו דערזועלבער אקס (110—ב) פון איר צווייטער זייט ד. ה. די ביידע סימעטרישע גראדע וואלטן זיך געשניטן אין צוויי פונקטן! (71).

לערואק: ציהט זיך איין גראדע דורך צוויי פונקטן און די צווייטע דורך זייערע שפיגלפונקטן צו אן אקס, דאן זיינען די ביידע גראדע סימעטריש צו דערזעלבער אקס, ד. ה. זיי דעקן זיך ביים אומקנייטשן זייער פלאטע ארום דער אקס (108) (זעה פיג. 20).

פאראויסב.: 1) P סימעטריש מיט P', 2) T סימעטריש מיט T';

פעסטשט: PT סימעטריש מיט P'T'.

באוויי: אומקנייטשן ארום דער אקס AX (73).

שלוסזאצן: **א)** די שטרעקע צווישן צוויי פונקטן איז גלייך דער שטרעקע צווישן זייערע שפיגלפונקטן (74און 108).

ב) ביידע סימעטרישע פונקטן זיינען גלייך דערווייטערט פון יעדן פונקט פון דער אקס. ווייל יעדער פונקט פון דער אקס קען אנגענומען ווערן פאר צוויי שוין צונויפגעלייגטע סימעטרישע פונקטן (110—ג) איז (ב) ניט מער ווי א פרט-פאל פון (א).

ג)—סימעטרישע גראדע בילדן מיט דער אקס גלייכע ווינקלען, ווייל די זייטן פון די ווינקלען דעקן זיך (83,108).

112. **איצט** וועלן מיר פארמולירן א רייע זאצן, וועלכע זיינען פארקערט פון די זאצן פון (111) און זיינען אויך ריכטיג.

לערואק: א (פארקערט פון 111-**א** און **ב**): ליגן צוויי פונקטן אויף צוויי סימעטרישע גראדע גלייך דערווייטערט פון זייער שותפותדיגן פונקט אויף זייער אקס, אדער גלייך דערווייטערט פון אנדערע צוויי סימעטרישע פונקטן אויף די-זעלבע גראדע (און אין איין ריכטונג פון זיי), דאן זיינען די פונקטן סימעטריש צו דערזעלבער אקס, ד. ה. זיי דעקן זיך ביים אומקנייטשן א.א.וו. (פיג. 20).

פאראויסב.: 1) PT סימעטריש מיט P'T', 2) P סימעטריש מיט P', 3) PT=P'T';

פעסטשט.: T סימעטריש מיט 'T

באַווייז: אומקנײַטשן אַרום דער סימעטריאַקס. (108) (74 פּאַרקערט)

ב) (פּאַרקערט פון 111-ג): צוויי גראַדע, וואָס האָבן אַ שותּפותדיגן פונקט אויף אַ דריטער, וועלכע ציִהט זיך צווישן זיי און מיט וועלכער זיי בילדן גלײַכע ווינקלען זײַנען סימעטריש צו דער דאָזיגער דריטער, ד. ה. זיי דעקן זיך א.א.וו. (זעה פיג. 20)

פּאָראויסב.: 'BET=BET ∢; פעסטשט.: ET סימעטריש מיט 'ET;

באַווייז: אומקנײַטשן אַרום EB! (83, 100, 46)

ב—I): צוויי גלײַכע בײַווינקלען (89-א) זײַנען סימעטריש צו זייער שותּפותדיגער זײַט, ד. ה. זיי דעקן זיך א. א. וו.

ב—II): **די ביסעקטריסע (89-ב) פון אַ ווינקל איז די סימעטריאַקס פון זײַנע זײַטן,** ד. ה. די זײַטן דעקן זיך א. א. וו.

ב—III): **א ווײַלרעכטע צו אַ גראַדער איז די סימעטריאַקס פון בײדע שטראַלן, אויף וועלכע זי האַקט די גראַדע,** ד. ה. בײדע שטראַלן דעקן זיך א. א. וו. (89-ה, 92, 90)

ג) די ענדפונקטן פון א שטרעקע זײַנען סימעטריש צו איר מיטנזײַלרעכטער ד. ה. די ענדפונקטן דעקן זיך א. א. וו. (89-ה, ב-III, 111-ב). אלע זאַצן פון (112) ווערן באַווייזן דורכן אומקנײַטשן.

113. לאָמיר איצט אויספאָרשן די אייגנשאַפטן פון דער סימעטריאַקס.

לערזאַץ: די סימעטריאַקס שטייט זײַלרעכט אין מיטנפונקט פון דער שטרעקע צווישן בײדע סימעטרישע פונקטן, אָדער: בײדע סימעטרישע פונקטן ליגן אויף איין זײַלרעכטער צו דער אקס גלײַך דערווײַטערט פון איר פוספונקט (89-ה). (פיג. 20).

פּאָראויסב.: P סימעטריש מיט 'P; פעסטשט.: 1) 'OP=OP, 2) 'AX⊥PP,

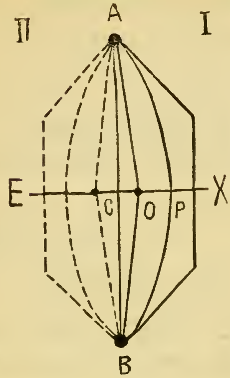
ד. ה. AOP=d און 'AOP=d.

באַווייז: אומקנײַטשן אַרום דער אקס (110-ג, 83, 89-ג, 89-ד)

א) שלוסזאַץ: יעדע צוויי געגעבענע פונקטן האָבן א סימעטריאַקס און ניט מער ווי איינע, אדער: יעדע צוויי געגעבענע פונקטן זײַנען סימעטריש צו אן אקס און ניט מער ווי צו איינער. צום באַווייז פאַרבינדן מיר בײדע פונקטן דורך א גראַדע און שטעלן אַוועק א מיטנזײַל-רעכטע צו דער שטרעקע. (112-ג, 90)

114. די סימעטריע פאַרהעלפט אונז צו באַווייזן עטלאַכע ווײַטערדיגע לערזאַצן. (פיג. 21)

לערזאַץ: די גראַדע שטרעקע, וואָס פאַרבינדט צוויי געגעבענע פונקטן, איז דער קירצסטער מרחק צווישן זיי.



פיג. 21.

פאַראויסבאַדונג: AB איז אַ גראָדע שטרעקע, וואָס פאַרבינדט דעם פונקט A מיט B; AOB, APB און AXB א. ד. גל. זיינען ניט קיין גראָדע.

פעסטשטעלונג: AB איז די קירצסטע פון די ליניעס, וואָס פאַרבינדן A מיט B.

באַווייז: דער קירצסטער מרחק צווישן פונקטן מוז זיין לויט זיין עצם דער איין און איינציגער, ווייל צוויי (אדער מער) קירצסטע קען ניט געבן. ווען מיר נאָך אָננעמען, אַז דער פאַרקערטער זאַץ איז אויך ריכטיג, ד. ה., אַז די שטרעקע, וועלכע איז די איין און איינציגע צווישן צוויי פונקטן, איז אויך די קירצסטע, דאן קענען מיר באַווייזן, אַז דאָס קען זיין נאָר אַ גראָדע. אין דער אמתן: אומקנייטשנדיג די פלאַטע אַרום דער גראָדער AB (פיג. 21.) וועלן מיר באַקומען צו יעדער־ פון די ליניעס AOB, APB און AXB א. ד. גל. נאָך איינע אַ סימעטרישע מיט איר צו דער גראָדער AB און אַ גלייך לאַנגע, נאָר AB וועט ניט האָבן נאָך אַזאַ ווי זי (110־ג) און וועט בלייבן די איין און איינציגע צווישן די פונקטן A און B און דעריבער אויך די קירצסטע, לויט דעם ווי מיר האָבן עס אָנגענומען אין אָנהויב פון באַווייז.

115. לערזאַץ: פון יעדן געגעבענעם פונקט, וואָס ליגט אויסער אַ געגעבענער גראָדער, קען מען אַראָפּלאָזן א ווײַלרעכטע (פּערפּענדיקולאַרע) אויף דער גראָדער און ניט מער ווי איינע. (פאַרגלייך 90) (פיג. 21.)

פאַראויסב.: EX איז א געגעבענע גראָדע און A—א פונקט אויסער איר.

פעסטשט.: 1) דורך A קען מען ציהען א ווײַלרעכטע צו EX און 2) ניט מער ווי איינע.

באַווייז: מיר קנייטשן אום די פלאַטע פון דער צייכענונג ארום EX (פון אויבן אראָפּ), געפינען דעם שפּיגלפּונקט B פון A און פאַרבינדן זיי בײדע דורך אַ גראָדע AB, וועלכע וועט שטיין ווײַלרעכט צו EX אין שניטפּונקט C (113). דערמיט איז באַוויזן דער ערשטער טייל פון דער פעסטשטעלונג. דעם צווייטן טייל וועלן מיר באַווייזן דורכן היפוך (100): זאל אַ וועלכע עס איז AO זיין נאָך אַ ווײַלרעכטע צו EX; דאַן מוז AOB זיין אַ גראָדע, ווייל לויט דער השערה (100) איז AOX=d און BOX=d (111־לערזאַץ און ג), און ווייל AOX+BOX=2d (99־1); אויב אַזוי, קומען מיר דערצו, אַז דורך די צוויי פונקטן A און B ציהען זיך צוויי גראָדע! אבסורד! (70); אונ־

זער השערה מוז אָפּגעוואָרפן ווערן: אויסער איינער (AB) קענען קיין אַנדערע זײַלרעכטע צו EX דורכן פּונקט A זיך ניט ציהען, אַלע אַנדערע זיינען גענייגטע צו AX (89-ו).

באמערקונג: די לײַנג פון דער שטרעקע, סיי דער זײַלרעכטער, סיי דער גענייגטער, וואָס ציהט זיך פון געגעבענעם פּונקט צו דער גראָדער, ווערט גערעכנט פון דעם געגעבענעם פּונקט ביזן פוספּונקט פון דער זײַלרעכטער אָדער גענייגטער.

שלוסזאצן: א) אַ זײַלרעכטע צו אַ געגעבענער גראדער פון אַ געגעבענעם פונקט אויסער איר, איז די קירצסטע שטרעקע צווישן פונקט און דער גראדער. (פיג. 21)

פאָראויסב.: 1) $AC \perp EX$, 2) AO — א גענייגטע; פעסטשט.: $AO > AC$.

באווייז: איז ACB א זײַלרעכטע צו EX דאן מוז AOB זײַן ניט קיין גראָדע (70,115), ד. ה. AOB איז א געבראָכענע און $AOB > ACB$ (114); אבער $AOB=2AO$ און $ACB=2AC$ (111-ב), $2AO > 2AC$ און $AO > AC$ (56).

ב) (פארקערט פון **א**) א שטרעקע, וואָס איז די קירצסטע צווישן א פונקט און א גראָדער, שטייט זײַלרעכט צו דער גראדער; ווען ניט וואָלט מען געקענט פון דעם פונקט ציהען אן אנדער זיילרעכטע צו דער גראָדער (115) און זי וואָלט געמוזט זײַן די קירצסטע (**א**), דאָס איז אבער א סתירה צום פאָראויסבאדונג.

ג) פון יעדן פונקט, וואס ליגט אויסער א גראדער, קען מען ציהען צוויי גענייגטע צו איר, וועלכע זײַנען גלייך לאנג. צום באווייז אומקנייטשן ארום דער זיילרעכטער! (112-ב-III, 110-ב, 111-ב)

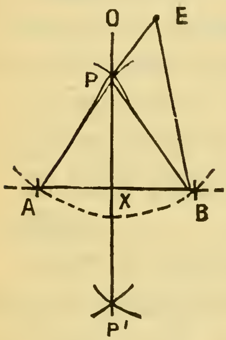
ד) צוויי זײַלרעכטע צו איין און דערזעלבער גראדער קענען זיך ניט שניידן (66), ווײַל דאמאלסט וואלט אויסגעקומען, אז דורך זייער שותפותדיגן פונקט ציהען זיך צוויי זיילרעכטע צו איין און דערזעלבער גראדער, ד. ה. א סתירה צום ערשט באוויזענעם זאץ (115).

116. אנשטאט צו זאגן: ציהען א זײַלרעכטע צו א גראדער דורך א געגעבענעם פונקט אויסער איר, זאגט מען: **אראפּלאָזן א זײַלרעכטע, (אַ פּערפּענדיקולארע) אויף דער גראָדער** פון דעם פונקט, וואס ליגט אויסער איר. אזוי ווי א זײַלרעכטע צו א גראדער פון א געגעבענעם פונקט איז די קירצסטע פון אלע שטרעקעס, וואס פארבינדן דעם פונקט מיט דער גראדער און דעריבער אויך א באשטימטע, ווערט איר לײַנג אנגענומען פאר א מאס פון דער ווײַטקייט צווישן פונקט און דער גראדער.

באַשטימונג: די לייַנג פון דער זייַלרעכטער, וואס איז אראפגעלאזן פון א געגעבענעם פונקט אויף א געגעבענע גראדע, הייסט דער **מרחק** אדער די **וויַיטקייט** צווישן פונקט און דער גראדער.

117. **לערזאץ א)** (פּאָזיטיווער): **יעדער פונקט פון א מיטנ־זייַלרעכטער צו א שטרעקע איז גלייַך דערווייַטערט פון אירע ענדעפונקטן,** און

ב) (נעגאטיווער פון **א**): **יעדער פונקט, וואס ליגט אויסער דער מיטנזייַלרעכטער צו א שטרעקע, איז אומגלייך דער־וויַיטערט פון אירע ענדעפונקטן** און ליגט נעענטער צו יענעם ענדע־פונקט, מיט וועלכן ער ליגט פון איין זייט פון דער מיטנזיילרעכטער (פיג. 22).



פיג. 22.

פאראויסב.: 1) $AX=XB$ 2) $OX \perp AB$, 3) פונקט P ליגט אויף OX, 4) פונקט E ליגט אויסער OX פון דער זייט וואו B.

פעסטשט.: 1) $PA=PB$, 2) $EA>EB$

באוויַז: OX איז די סימעטריאקס פון די פונקטן A און B (112־ג) און דעריבער איז $PA=PB$ (111־ב); וויַטער: EB איז אַ גראדע צווישן די פונקטן E און B, EPB—א געבראכענע צווישן דיזעלבע פונקטן, דעריבער איז $EP+PB>EB$.(114) ווייַל אבער איז $PB=PA$, $EP+PA>EB$, אדער $EA>EB$! (52)

ג) (פאַרקערט צו **א**): איז א פונקט גלייַך דערווייַטערט פון די ענדעפונקטן פון א שטרעקע, דאן ליגט ער אויף דער מיטנזייַלרעכטער צו איר. ווען ניט, וואלט דער פונקט (לויט **ב**) געווען אומגלייַך דערווייַטערט פון די ענדעפונקטן און דאס וואלט סותר געווען אונזער פאראויסבאדונג.

ד) (פארקערט צו **ב**): איז אַ פונקט אומגלייַך דערווייַטערט פון די ענ־דע־פונקטן פון א שטרעקע, דאן ליגט ער אויסער דער מיטנזייַלרעכטער צו איר. ווען ניט, וואלט דער פונקט (לויט **א**) געווען גלייַך דערווייַטערט פון די ענדע־פונקטן און דאס וואלט סותר געווען אונזער פאראויסבאַדונג.

(באטראכט די ערשט באוויזענע פיר זאצן און שייכות מיט דעם, וואס עס איז געזאגט אין (42).

118. די אייגנשאפטן פון סימעטריע ווי אויך די ערשט באוויזענע זאצן פארהעלפן אונז אויסצופירן עטלאכע געאמעטרישע אויפשטעלונגען ד. ה. אנצייכענען פיגורן מיט באשטימטע אייגנשאפטן:

א) טיילן אַ געגעבענע שטרעקע אויף דער העלפט, ד. ה.

געפינען איר מיטנפונקט. (פיג. 22) **געגעבן:** די שטרעקע AB; **געזוכט:** איר מיטנפונקט X ד. ה. אַזא פונקט, וואָס XA=XB; **אויספירונג:** דורך די פונקטן A און B ציהען מיר מיט איין און דעמזעלבן ראַדיוס (וואָס זאָל זיין אומגיפּער גרעסער פון דער העלפט פון AB), צוויי אומקרייזבויגנס, וועלכע וועלן זיך שניידן אין די פונקטן P און P' (איבער און אונטער דער געגעבענער שטרעקע); דערנאָך ציהען מיר די גראָדע PP', וועלכע וועט שניידן AB אין געזוכטן פונקט X; **באַווייז:** די פונקטן P און P' ליגן ביידע אויף דער מיטנזײַלרעכטער צו AB, ווײַל זיי זיינען גלייך דערווײַטערט (ראדיוסן 30) פון אירע ענדפונקטן (117־ג); ביידע פונקטן P און P' באַשטימען פולקום די מיטנזײַלרעכטע, P'P' ווײַל זי איז א גראדע (69) און X איז דער געזוכטער פונקט (דער מיטן פון AB). אוממיטלבאר וואלט מען עס געקאַנט באַווײַזן, באַטראַכטנדיג PP' פאר דער סימעטריאַקס פון די פונקטן A און B. אויפן זעלבן אופן און מיטן זעלבן באַווײַז ווערט אויסגעפירט די ווײַטערדיגע אויפשטעלונג:

ב) צו אַ געגעבענער שטרעקע אַוועקשטעלן אַ מיטנזײַלרעכטע.

ג) אין אַ געגעבענעם פונקט פון אַ גראָדער אַוועקשטעלן אַ זײַלרעכטע צו איר.

געגעבן: די גראָדע AB און דער פונקט X אויף איר (פיג. 22.); **פאָדערונג:** אָנצייכענען אַ גראָדע, וואס זאָל שטיין זיילרעכט צו AB אין פונקט X; **אויספירונג:** מיר מאַכן דעם פונקט X פאַר אַ מיטנפונקט פון אַ שטרעקע AB, אָפלייגנדיג אויף דער געגעבענער גראָדער צוויי גלײַכע שטרעקעס XA און XB פון ביידע זײַטן פון געגעבענעם פונקט X און פירן די אויפשטעלונג ווי אין (א). PP' וועט זיין אַ מיטנזײַלרעכטע און במילא אַ זיילרעכטע און מוז גיין דורכן פונקט X, ווײַל אַ שטרעקע (AB) האָט ניט מער ווי איין מיטנפונקט.

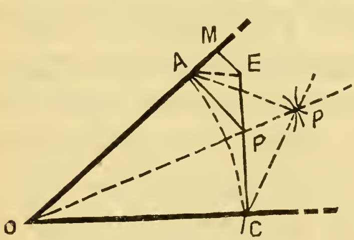
ד) פון אַ געגעבענעם פונקט, וואס ליגט אויסער אַ געגעבענער גראָדער אַראָפּלאָזן א זײַלרעכטע אויף איר. (פיג. 22)

געגעבן: די גראָדע AB און דער פונקט אויסער איר; **פאָדערונג:** פון P אַראפלאָזן אַ זײַלרעכטע אויף AB; **אויספירונג:** מיר ציהען דורכן פונקט P אַן אומקרייזבויגן מיט אזא ראדיוס, אַז AB זאל געשניטן ווערן אין צוויי פונקטן A און B, דורך די צוויי פונקטן ציהען מיר ווײַטער מיט גלײַכע ראדיוסן אומקרייזבויגנס, וועלכע זאלן זיך שניידן אין אַ וועלכן עס איז פונקט P'. די גראדע PP' איז די געזוכטע. **באַווײַז:** די פונקטן A און B זײַנען סימעטריש צו PP', וועלכע ווערט באַשטימט אַלס זייער סימעטריאַקס דורך

צוויי אירע פונקטן P און P′ (גלייכע ראדיוסן! 30, 117-ג און 69); PP′ הייסט עס איז די מיטנזיילרעכטע צו דער שטרעקע AB און במילא די זייל-רעכטע צו דער גראָדער AB.

ה) **אויפגאבע. געפינען א פונקט, וואָס זאל זיין סימעטריש מיט א געגעבענעם פונקט צו א געגעבענער אַקס. לייזונג:** פון געגעבענעם פונקט אַראפּלאָזן אַ זיילרעכטע אויף דער אַקס (ד), פֿארלייגערן זי פון דער צווייטער זייט אַקס איף אַ שטרעקע, וואָס איז גלייך דער ווייט-קייט פון פונקט פון דער אַקס (115-באמ.) דער אָנגעמערקטער ענדעפונקט וועט זיין סימעטריש מיטן געגעבענעם צו דער אַקס (112-ג). פאַרבינדנדיג דורך גראָדע שטרעקעס עטלאַכע פונקטן, וואָס ליגן פון איין זייט אַקס אין וועלכן עס איז סדר און זייערע שפּיגלפונקטן פון דער צווייטער זייט אַקס אין זעלבן סדר, וועלן מיר באַקומען צוויי גראָדליניגע פיגורן, וועלכע וועלן זיין סימעטריש צו דערזעלבער אַקס. כדי צו אַ געגעבענער גראדליניגער פיגור געפינען איר סימעטרישע צו אַן אַקס, דארף מען געפינען אַלע שפּיגלפונקטן פון די שפּיצפונקטן פון דער פיגור צו דער געגעבענער אַקס און פאַרבינדן זיי דורך שטרעקעס אין זעלבן סדר ווי ביי דער געגעבענער פיגור. (פּרוּוו עס אויף אַ צייכענונג!).

119. לערזאץ. א (פאזיטיווער): — **יעדער פונקט פון דער ביסעקטריסע פון אַ ווינקל איז גלייך דערווייטערט פון זיינע זייטן,** (פיג. 23) און



פיג. 23.

ב (נעגאטיווער): יעדער פונקט, וואָס ליגט אויסער דער ביסעקטריסע פון א ווינקל איז אומגלייך דערווייטערט פון זיינע זייטן און איז נענטער צו יענער זייט, מיט וועלכער ער ליגט פון איין זייט פון דער ביסעקטריסע.

פאראויסב.: OP′ איז די ביסעקטריסע פון ווינקל AOC, פונקט P ליגט אויף איר, פונקט E—אויסער איר, $PA \perp OA$, $PC \perp OC$, $EC \perp OC$, $EM \perp OM$;

פעסטשט.: 1) PC=PA, 2) EM > EC; הילפליניע: די גראדע AE (94-באמ.)

באווייז: OP′ איז די סימעטריאַקס פון די זייטן OC און OA פון געגעבענעם ווינקל (112—ב—II); ביים אומקנייטשן ארום איר וועלן זיך די זייטן OC און OA דעקן (108) און דעמאלסט מוזן זיך אויך דעקן די זיילרעכטע PA און PC, ווען ניט וואלט אויסגעקומען, אז פון איין און דעמזעלבן פונקט P

(וועלכער בלייבט אויף זיין ארט ביים אומקנייטשן (110-ג) קען מען אראפּ-לאזן צוויי ווילרעכטע אויף איין גראָדער (ביידע צונויפגעלייגטע זייטן), דאס איז אבער אוממעגלאך! (115). בלייבט, הייסט עס, אז PC און PA מוזן זיך דעקן און זיינען במילא גלייך (74). ווייטער: EM איז א ווילרעלטע (פּאראויסז.!) צו OA, EA א גענייגטע. $EA > EM$ (115-א), $EP+PA > EA$ (114) און דעריבער $EP+PA > EM$ (48) אבער $PA=PC$, דעריבער איז $EP+PC > EM$ אדער $EC > EM$ (52). און דאס האָבן מיר געוואלט באווייזן!

ג) (פארקערט פון א): ליגט אַ פונקט צווישן די זייטן פון אַ ווינקל גלייך דערווייטערט פון זיי, דאן ליגט ער אויף דער ביסעקטריסע פון דעם דאזיגן ווינקל. ווען ניט, וואלט דער פונקט (לויט ב) געווען אומגלייך דערווייטערט פון די זייטן פון ווינקל, און דאס וואלט סותר געווען אונזער פּאראויסזאדונג.

ד) (פארקערט פון ב): ליגט א פונקט צווישן די זייטן פון א ווינקל אומ-גלייך דערווייטערט פון זיי, דאן ליגט ער אויסער דער ביסעקטריסע פון דעם דאזיגן ווינקל. ווען ניט, וואלט דער פונקט (לויט א) געווען גלייך דערווייטערט פון די זייטן פון ווינקל, און דאס וואלט סותר געווען אונזער פאראויסזאדונג.

120. שטיצנדיג זיך אויף די ערשט באוויזענע זאצן (119) און אויף די אייגנשאפטן פון דער סימעטריאקס, קענען מיר לייזן אזא געאָמעטרי-שע אויפשטעלונג:

טייכן אַ געגעבענעם ווינקל אויף דער העלפט, אָדער ציהען די ביסעקטריסע פון אַ געגעבענעם ווינקל. (פיג. 23.)

געגעבן: דער ווינקל AOC; **געזוכט:** די ביסעקטריסע זיינע. (89-ב) **אויספי-רונג:** דורכן שפּיצפּונקט O פון ווינקל ציהען מיר מיט אַ וועלכן עס איז ראַדיוס אן אומקרייזבויגן, וועלכער זאל שניידן די זייטן פון ווינקל אין די פונקטן A און C; ציהענדיג פון די דאָזיגע פונקטן מיט איין און דעמזעלבן ראַדיוס נאך צוויי אומקרייזבויגנס, וועלן מיר באַקומען זייער שניטפּונקט P′. די גראָדע OP′ איז די געזוכטע ביסעקטריסע. **באווייז:** די געזוכטע ביסעקטרי-סע דאַרף זיין די סימעטריאַקס פון די זייטן OC און OA (112-ב-ה), איין פונקט אירן האָבן מיר שוין: דעם שפּיצפּונקט O (111-א*) די פונקטן A און C זיינען סימעטריש צו דער געזוכטער סימעטריאַקס (112-א). דער פונקט P′ געהערט אויך צו דער סימעטריאַקס פון די פונקטן A און C (117-ג, 112-ג), וועלכע פאַרמאָגן נאָר איין סימעטריאקס (113-א) און וויל די סימעטריאקס איז אַ גראָדע, מוז עס זיין OP′ (69). איז OP′ די סימעטריאקס, דאַן איז ווינקל POC גלייך POA און OP איז די ביסעקטריסע. (89-ב)

121. אַלע פונקטן פון דער מיטנזייקרעכטער צו אַ גראָדער, אַלע פונקטן פון דער ביסעקטריסע פון אַ ווינקל, פאַרמאָגן, ווי מיר האָבן באַוויזן אין (117) און (118), באַשטימטע אייגנשאַפטן, וועלכע אַנדערע פונקטן פאַרמאָגן ניט. דאָסזעלבע האָבן מיר געזעהען ביים אומקרייז (30). אַזאַ ליניע וואָס אַלע אירע פונקטן פאַרמאָגן אַן אייגנשאַפט, וועלכע פעלט ביי אַנדערע פונקטן, טראָגט אַ ספּעציעלן נאָמען.

באַשטימונג: אַ ליניע, וואָס אַלע אירע פונקטן פאַרמאָגן אַ געוויסע אייגנשאַפט, וועלכע פעלט ביי די פונקטן, וואָס ליגן אויסער איר, הייסט — דער געאָמעטרישער אָרט פון פונקטן מיט דער געוויסער אייגנשאַפט.

א) די מיטנזייקרעכטע צו אַ שטרעקע איז דער געאָמעטרישער אָרט פון פונקטן, וואָס זיינען גלייך דערווייטערט פון אירע ענדעפונקטן.

ב) די ביסעקטריסע פון אַ ווינקל איז דער געאָמעטרישער אָרט פון פונקטן, וואָס זיינען גלייך דערווייטערט פון זיינע זייטן. (116 באַשטימונג)

ג) דער אומקרייז איז דער געאָמעטרישער אָרט פון פונקטן, וואָס זיינען גלייך דערווייטערט פון איין פונקט, וואָס ליגט אין אים און הייסט צענטער, אָדער מיטלפונקט פון אומקרייז. (30)

122. לאָמיר איצט באַהאַנדלען די סימעטרישקייט פון פונקטן, אַרויסגייענדיג פון דער סימעטרישקייט פון ליניעס. אַ פונקט קענען מיר באַטראַכטן פאַר אַ שותּפותדיגן אָרט (שניטפונקט) פון צוויי ליניעס. צוויי גראָדע קענען האָבן ניט מער ווי איין שותּפותדיגן פונקט (71), אַ קרומע אָבער מיט אַ גראָדער, אָדער אַ קרומע מיט אַ קרומער, קענען האָבן מער ווי איין שותּפותדיגן פונקט. בנוגע גראָדע ליניעס זיינען קלאָר פאָלגנדיגע זאַצן: (פיג. 20)

א) די שניטפונקטן T און T' פון צוויי גראָדע KT און PT און פון זייערע סימעטרישע גראָדע צו אַן אַקס זיינען סימעטריש צו דערזעלבער אַקס (84);

ב) דער ווינקל צווישן די גראָדע איז גלייך דעם ווינקל צווישן זייערע סימעטרישע גראָדע ($P'T'K' = PTK$) (84); דערפון איז ווייטער קלאָר: **ג)** אַ זייקרעכטע צו דער סימעטריאַקס שניידט יעדער פאַר סימעטרישע גראָדע (צו דערזעלבער אַקס) אין סימעטרישע פונקטן און מיט גלייכע ווינקלען (TT' שניידט PT און $P'T'$ אין סימעטר. פונקטן T און T' (83, 84); וואָס אָנבאַלאַנגט די שניטפונקטן פון סימעטרישע ליניעס בכלל, איז קלאָר, אַז:

ד) (פארקערט פון א): איז א פונקט שותפותדיג ביי צוויי ליניעס פון איין זייט אקס, דאן איז זיין שפיגלפונקט שותפותדיג ביי זייערע סימעטרישע ליניעס צו דערזעלבער אקס (ווייל דער פונקט מוז האבן א שפיגלפונקט (110), וועלכער ליגט אויך איינצייטיג אויף צוויי ליניעס. (84)

123. וואס אנבאלאנגט דער סימעטרישקייט פון ליניעס בכלל, איז קלאר, אז צוויי ליניעס זיינען סימעטריש איינע מיט דער אנדערער צו אן אקס, ווען יעדער פונקט פון איינער האט צו זיך א שפיגלפונקט אויף דער צווייטער צו דערזעלבער אקס. דאסזעלבע גילט אויך פאר אלערליי פיגורן. א סך פיגורן זיינען סימעטריש צו אן אקס, וועלכע האט מיט דער פיגור אליין שותפותדיגע פונקטן, ד. ה. די אקס שפאלט די פיגור אין צוויי סימעטרישע טיילן, וועלכע דעקן זיך ביים אומקנייטשן זייער פלאטשע ארום דער אקס. (פיג. 20-ב). איין און דיזעלבע פיגור קען זיין סימעטריש צו עטלאכע אקסן (פיג. 20-ב). שפעטער וועלן מיר נאך נענטער באטראכטן די אקסיאלע סימעטרישקייט פון פיגורן.

II

צענטראלע סימעטריע.

124. ביים צונויפלייגן די זייטן פון צוויי ווינקלען דורך דרייאונג ארום א פונקט, אדער צענטער, האבן מיר זיך איבערצייגט, אז די זייטן וועלן זיך דעקן, אויב די ווינקלען זיינען גלייך (86). עס איז קלאר, אז ביים צונויפלייגן די זייטן וועט יעדער פונקט פון איין ז"ט (OB פיג. III-15) דעקן א געוויסן פונקט פון דער צווייטער זייט (OM). אט אזא לאגע פון צוויי פונקטן (אדער ליניעס) שאפט אן אנדער ארט סימעטריע, **צענטראלסימעטריע** וועלכע מיר וועלן באלד באהאנדלען.

125. **באשטימונג: צוויי פונקטן** (K,K') (אדער ליניעס) **הייסן סימעטריש איינער מיטן אנדערן צו א פונקט** (C) **אויב זיי דעקן זיך ביים דרייען איינעם פון זיי** (K אדער K') **אויף א האלבע אומדרייאונג** (180°) **ארום דעם דאזיגן פונקט** (C) **וועלכער הייסט זייער סימעטריצענטער.** פון דער באשטימונג איז קלאר אז: (פיג. 24)

א) דער סימעטריצענטער (C) ליגט צווישן ביידע סימעטרישע פונקטן (K'K), אויף איין גראדער מיט זיי און גלייך דערווייטערט פון זיי, ד. ה. ער

טײלט די שטרעקע צווישן די בײדע סימעטרישע פונקטן אויף דער העלפט ווײַל א האלבע דרײאונג באטרעפט 180° (31) ד. ה. 2d און (96=ב)! (פאר-גלײַך (110—א) פארקערט:

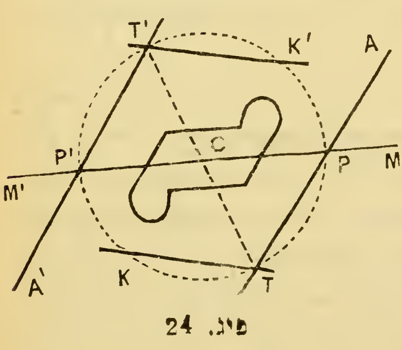
ב): יעדער געגעבענער פונקט (K) האט צו א געגעבענעם צענטער (C) זײַן סימעטרישן פונקט K′ און ניט מער ווי אײנעם ווײַל צווישן געגעבענעם פונקט און צענטער קען מען ציהען ניט מער ווי אײן גראדע (70) און א שטרעקע פארמאגט נאר איין מיטנפונקט (פארגלײך 110—ב)

ג): דער סימעטריצענטער (C) בלײַבט בײַ דער דרײאונג אויפן זעלבן ארט און מיר קענען אננעמען, אז דער סימעטריצענטער איז סימעטריש מיט זיך אלײן, ד. ה. צונויפגעלײגט מיט זײַן סימעטרישן פונקט אויפן זעלבן ארט. (פארגלײַך 110-ג)

ד): צו אײן געגעבענעם פונקט קען מען נעמען אומענדלאך פיל צענטערס און געפינען צו יעדן פון זײ דעם פונקט, וואס איז סימעטריש מיטן געגעבע-נעם (פארגל. 110—ד)

ה): אײן און דערזעלבער פונקט (C) קען זײַן א סימעטריצענטער אײנציי-טיג בײַ עטלאכע פארן סימעטרישע פונקטן (K=K′, P=P′)

126. פון דער באשטימונג וועגן צענטראלסימעטרישע פונקטן, ווי אויך פון דעם, וואס מיר האבן בכלל געזאגט וועגן צענטראלער סימעטריע, מאכן מיר א רײַע זאצן בנוגע די סימעטרישקײַט פון ליניעס, וועלכע ציהען זיך דורך סימעטרישע פונקטן און פארקערט: ווען צענטראלסימעטרישע ליני-עס באשטימען די סימעטרישקײט פון פונקטן. (פיג. 24)



פיג. 24

א): ציהט זיך אײן גראדע (PT) דורך צוויי פונקטן (P און T) און די צווייטע (P′T′) דורך זײערע צענטראל-סימעטרישע פונקטן (P′ און T′) דאן זײַנען בײדע גראדע (PT און P′T′) סימעטריש צום זעלבן צענטער, ד. ה. בײדע גראדע דעקן זיך בײַם דרײען אײנע פון זײ אויף א האלבע אומדריי-אונג (180°) ארום צענטער (73,125) (פארגל. 111—א)

א*): א גראדע איז צענטראלסימעטריש צו יעדן פון אירע פונקטן, ד. ה. יע-דער פון די שטראלן, וואס גײען ארויס פון פונקט וועט דעקן דעם ארט פון צווייטן, בײַטן זײַן לאגע מיטן צווייטן, בײַם אומדרײען די גראדע אויף א האלבע

אומדרייאונג (180°) ארום דעם פונקט, ווייל מ׳קען אויף יעדער גראדער אנמערקן פון יעדן געגעבענעם פונקט אירן צוויי אנדערע פונקטן פוןביידע זייטן, וועלכע זיינען סימעטריש צום געגעבענעם. (125-ג, 126=**א**)

ב) די שטרעקע (KT) צווישן צוויי פונקטן (K און T) איז גלייך דער שטרעקע (K′T′) צווישן זייערע צענטראל סימעטרישע פונקטן (K′ און T′) (111=**א**,74)

ג) צענטראלסימעטרישע גראדע (PT און P′T′) זיינען גלייך דערווייטערט (116=באשטימונג) פון זייער סימעטריצענטער, ווייל בשעת די סימעטרישע גראדע וועלן זיך דרעען נאכן אומדרייען אויף 180° מוזן די ווייטערעכטע אויף זיי פון צענטער זיך אויך דרעען און במילא זיין גלייך (74), ווען ניט וואלט עס סותר געווען דעם זאץ (115).

127. נאך עטלאכע זאצן מאכן אונז קלאר די אייגנשאפטן פון סימעטרישע גראדע: (פיג. 24)

א) א גראדע, וועלכע שניידט צוויי געגעבענע סימעטרישע גראדע (שניידליניע PP′) און ציהט זיך דורכן סימעטריצענטער (C), שניידט די סימעטרישע גראדע (AT און A′T′) אין סימעטרישע פונקטן (P און P′) און מיט גלייכע ווינקלען (CPT און CP′T′), וועלכע ליגן אויף דער שניידליניע מיט זייערע איינארטיגע (81) זייטן. **באווייז**: CP וועט דעקן CP′ לויט (126=**א***) און AT וועט דעקן A′T′ לויטן פאראויסבאדונג; און ווייטער (84).

ב) ביים צונויפלייגן צוויי צענטראל סימעטרישע גראדע דורכן דרייען ארום צענטער אויף א האלבע אומדרייאונג (180°), דעקן זיך אזויגע שטראלן זייערע וועלכע ליגן פון **פארשיידענע** זייטן פון דער גראדער, וואס ציהט זיך דורך זייער סימעטריצענטער און שניידט זיי ביידע. PT ליגט **אונטער** דער שניידליניע PP′ און דעקט ביים אומדרייען P′T′, וועלכער ליגט **איבער** איר (פיג. 24).

ג) **צוויי צענטראלסימעטרישע גראדע קענען זיך קיינמאל ניט שניידן** (66) ווי ווייט מ׳זאל זיי ניט **פארלייגערן** **אין ביידע זייטן** (פיג. 25.) וואלטן די שטראלן P′A′ און PT זיך געשניטן אין א וועלכן עס איז פונקט (K למשל) (מאך א צייכענונג) און וואלטן זיי ביים אומדרייען געדעקט די שטראלן PA און P′T′, דאן וואלטן זיך אט די ביידע לעצטע אויך געמוזט שניידן אין א וועלכן עס איז פונקט (K′ למשל) פון אנטקעגנדיגער זייט (84). ביים אומדרייען צוריק אין די פריהערדיגע לאגע, וואלט אויסגעקומען אז ביידע גראדע AT און A′T′ שניידן זיך אין צוויי פונקטן K און K′! אבסורד! (71) לאמיר נאך באהאנדלען א זאץ, וואס איז פארקערט צו (**א**).

ד) (פארקערט צו **א**) **ווערן צוויי גראדע** (AT און A'T') **געשניטן פון א דריטער** (PP') **אזוי, אז די בילדן פון ביידע זייטן פון דער שניידליניע גלייכע ווינקלען** (CPT און CP'T'), **וואס ליגן אויף דער שניידליניע מיט זייערע איינארטיגע** (רעכטע אויף דער פיג. 24) **זייטן, דאן זיינען די צוויי גראדע סימעטריש צום מיטנפונקט** (C) **פון דער שטרעקע** (PP') **צווישן די שפיץ־פונקטן** (P און P') **פון די ווינקלען**, ד. ה. די גראדע וועלן זיך דעקן ביים דרייען איינעם פון זיי אויף א האלבע דרייאונג ארום דעם צענטער. P' וועט מוזן דעקן P (126=**א*** און 125=**א**) און וואלט CP'T' ניט געדעקט זיין גלייכן CPT, וואלטן מיר געהאט, אז א טייל איז גלייך דעם גאנצן!(46)

ד*) צוויי זיילרעכטע צו איין און דערזעלבער גראדער זיינען סימעטריש צום מיטנפונקט פון דער שטרעקע צווישן זייערע פוספונקטן. דאס איז א פרט־פאל פון ד.

ה) ליגן צוויי פונקטן (T און T') אויף צוויי צענטראלסימעטרישע גראדע (AT, A'T') גלייך דערווייטערט (PT=P'T') פון צוויי סימעטרישע פונקטן (P און P') און פון פארשיידענע זייטן פון זייער שניידליניע (PP'), דאן זיינען די ערשטע צוויי פונקטן סימעטריש צום זעלבן צענטער.(127=**א**, 100, 46).

128. בנוגע צענטראלסימעטריע פון ליניעס בכלל, קען גילטן דאסזעלבע, וואס מיר האבן געזאגט וועגן אקסיאלסימעטריע פון ליניעס (123), אויך דער סימעטריע צענטער קען ליגן אויף דער סימעטרישער פיגור גופא (פיג. 24: די אינעווייניגסטע פיגור). מיר וועלן זיך נאך שפעטער באגעגענען מיט צענטראל־סימעטריע.

אויפגאבע: געגעבן איז א פונקט. געפינען זיין סימעטרישן צו א געגעבענעם צענטער. **אויספירונג:** דורכן געגעבענעם פונקט און דעם צענטער ציהען מיר א גראדע און פארלענגערן זי פון דער צווייטער זייט פון צענטער אויף א שטרעקע, וואס איז גלייך דער שטרעקע צווישן געגעבענעם פונקט און צענטער; דער אנגעמערקטער ענדפונקט וועט זיין סימעטריש מיטן געגעבענעם צום געגעבענעם צענטער. (באווייז!) געפינענדיג צו עטלאכע געגעבענע פונקטן זייערע סימעטרישע צו א געגעבענעם צענטער און פארבינדנדיג די געגעבענע פונקטן צווישן זיך און זייערע געפונענע סימעטרישע צווישן זיך אין איין און דעמזעלבן וועלכן עס איז סדר דורך גראדע שטרעקעס, וועלן מיר באקומען צוויי גראדליניגע פיגורן, וועלכע זיינען סימעטריש צום זעלבן צענטער. (פיר עס אויס אויף א צייכענונג!).

קאַפּיטל ד.

פּאַראַלעלקייט.

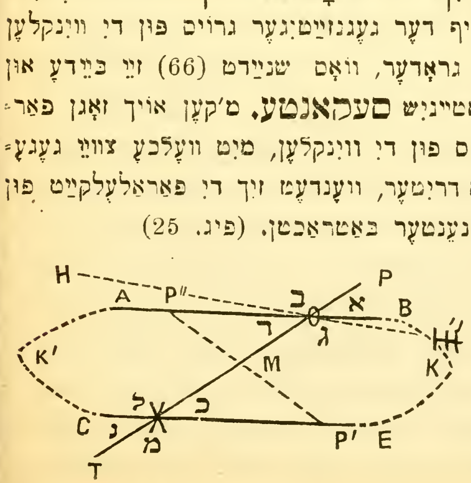
129. מיר האָבן ביז איצט באַהאַנדלט סיסטעמאַטיש אַזעלכע לאַגעס פון צוויי גראַדע, בעת וועלכע די גראַדע פאַרמאָגן אַ שותפותדיגן פונקט, שניידן זיך. ביי דער אַקסיאַלער (115-ד) און צענטראַלער (127-ג) סימעטריע האָבן מיר זיך שוין אָנגעשטויסן אויף אַזעלכע לאַגעס פון (סימעטרישע) גראַדע, בעת וועלכע זיי קענען קיין שותפותדיגן פונקט ניט האָבן. לאָמיר נעענטער באַשטימען אָט אַזאַ לאַגע:

באַשטימונג: צוויי גראַדע, וועלכע ליגן אויף איין פלאַכע און שניידן זיך ניט ווי ווייט מ'זאָל זיי ניט פאַרלענגערן פון ביידע זייטן — הייסן פּאַראַלעל איינע צו דער אַנדערער. דערפון שליסן מיר באַלד:

שלוסזאַץ: א) צוויי גראַדע, וואָס זיינען סימעטריש צו אַ צענטער זיינען פּאַראַלעל (127-ג).

ב) צוויי זייטרעכטע צו איין דערזעלבער גראַדער זיינען פּאַראַלעל (115-ד).

אַנשטאָט דעם וואָרט פּאַראַלעל באַנוצט מען דעם סימן „||". **צוויי גראַדע, וואָס ליגן אויף איין פלאַכע, קענען זיין ענטוועדער פּאַראַלעל איינע צו דער אַנדערער, אָדער זיך שניידן, (66) אַ דריטע לאַגע קענען מיר זיך ניט פאָרשטעלן.** די פּאַראַלעלקייט פון צוויי גראַדע רופט זיך אָפּ אויף דער גענגזייטיגער גרויס פון די ווינקלען וועלכע זיי בילדן מיט אַ דריטער גראַדער, וואָס שניידט (66) זיי ביידע און הייסט שניידלינע, אָדער אויף לאַטייניש **סעקאַנטע.** מ'קען אויך זאָגן פאַרקערט: פון דער גענגזייטיגער גרויס פון די ווינקלען, מיט וועלכע צוויי געגעבענע גראַדע ווערן געשניטן פון אַ דריטער, ווענדעט זיך די פּאַראַלעלקייט פון די געגעבענע גראַדע. לאָמיר עס נעענטער באַטראַכטן. (פיג. 25)



פיג. 25.

130. ווערן צוויי גראַדע (AB און CE) געשניטן פון אַ דריטער (PT) אַזוי, אַז אַלע דריי שניידן זיך מער ווי אין איין פונקט (O און X), דאַן בילדן זיך 8 ווינקלען, צו 4 אין אַ גרופּע אַרום יעדן שניטפונקט:

אַרום פּונקט O—די ווינקלען **א**, **ב**, **ג** און **ד**, אַרום X — די ווינקלען **כ**, **ל**, **מ** און **נ**. איז אונז באַקאַנט די גרויס פון וועלכן עס איז ווינקל פון אַ גרופּע, דאַן קענען מיר לייכט געפינען די גרויס פון יעדן ווינקל פון **דערזעל-בער** גרופּע, ווייל יעדער פון די איבעריגע ווינקלען איז אָדער שעראווינקלדיג (101, 102) אָדער מיטגעשטרעקט (89=ג, 94) צום באַקאַנטן. כדי פון דער גרויס פון איין ווינקל געפינען די גרויס פון אַלע 7 איבעריגע, דאַרפן מיר האָבן אַ וועלכע עס איז שייכות, אַ געבונדנקייט, צווישן אַ ווינקל פון איין גרופּע מיט אַ ווינקל פון דער צווייטער. אַזעלכע פּאָרן, וואָס זאָלן באַשטיין פון צוויי ווינקלען פון פאַרשיידענע גרופּעס, קענען מיר בילדן אַ סך, נעמענדיג פאַרשיידענע ווינקלען און אויפשטעלנדיג פון זיי אַלערליי פּאָרן.

131. לאָמיר געבן אַ נאָמען די ווינקלען און די פּאָרן, וועלכע מיר וועלן אויפשטעלן פון זיי.

א) די ווינקלען **א**, **ב**, **מ** און **נ**— הייסן **אויסנווייניגסטע**, **ג**, **ד**, **כ** און **ל**—**אינעווייניגסטע**, ווייל זיי ליגן אויסער אדער צווישן די געגעבענע גראָדע (AB און CE).

ב) די ווינקלען **א**, **ג**, **כ** און **מ**—הייסן **איינזייטיגע**, ווייל זיי ליגן פון **איין זייט** פון דער שניידליניע (PT); דעמזעלבן נאָמען טראָגן די ווינקלען **ב**, **ד**, **ל** און **נ**.

די נעמען פון די **פּאָרן**, וועלכע מיר שטעלן צונויף, זיינען פאָלגנדיגע:
1) **א** מיט **נ**, 2) **ב** מיט **מ**—הייסן **אויסנווייניגסטע ביטווינ-קלען**, ווייל זיי בייטן זיך מיט זייערע לאַגעס אויף דער פּלאַטע ביים אומ-דרייען די גאַנצע פיגור אויף אַ האַלבע אומדרייאונג (180^0) (דריי אום דעם בוך מיטן קאָפּ אַראָפּ!), צוליבן זעלבן טעם הייסן די ווינקלען 3) **ג** מיט **ל**, און 4) **ד** מיט **כ** — **אינעווייניגסטע ביטווינקלען**;
5) **א** מיט **מ**, 6) **ב** מיט **נ** הייסן—**אויסנווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען**, 7) **ג** מיט **כ**, 8) **ד** מיט **ל** הייסן—**אינעווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען**. ביידע נעמען זיינען קלאָר פון די לאַגעס פון די ווינקלען אַנטקעגן די געגעבענע גראָדע (**א**) און זייער שניידליניע (**ב**);
9) **א** מיט **כ**, 10) **ב** מיט **ל**, 11) **ג** מיט **מ**, 12) **ד** מיט **נ** הייסן—**היפּווינקלען**, ווייל מ'דאַרף איבערשפּרינגען (**איבערהיפּן**) אַ צווישנליגנדיגן ווינקל, כדי פון איינעם פון זיי קומען צום צווייטן: למשל פון **א** צו **כ** ווערט איבערגעהיפּט **ג** א. ד. גל.

132. די שייכותן צווישן די ווינקלען פון די פּאָרן, וועלכע קענען זיין צווישן זיי און וועלכע מיר וועלן אָפּט באַהאַנדלען זיינען פאָלגנדיגע: (62!)

1) א=נ, 2) ב=מ, 3) ג=ל, 4) ד=כ ד. ה. אַז דיִ בײַטווינקלען זײַנען גלײַך צווישן זיך.
5) א=כ, 6) ב=ל, 7) ג=מ, 8) ד=נ ד. ה. אז דיִ היִפּוויִנקלען זײַנען גלײַך צוויִשן זיִך.
9) א+מ=2d, 10) ב+נ=2d, 11) ג+כ=2d,
12) ד+ל=2d ד. ה. אַזדיִ סומע פון יעדער פּאָר (אויסגווייניגסטע אָדער איִנעווייניִגסטע) אייִנזײַטיגע ווינכלען באַטרעפט 2d.

133. **א**יִצט וועלן מיִר נאָך באַווײַזן אַז, אָננעמענדיג וועלכע עס איִז אייִנע פון דיִ 12 גלײַכונגען (132) פאר א פּאָראויסבאַדונג, קענען מיִר באַווײַזן אַלע עלף איִבעריִגע, שטיִצנדיִג זיִך אויף דיִ זאַצן (94) און (102). **לערזאַך** איִז אייִנע פון דיִ גלײַכונגען פון (132) ריִכטיִג, דאַן זײַנען אַלע איִבעריִגע אויך ריִכטיִג. לאָמיִר נעמען פאר אַ פּאָראויסבאַדונג למשל דיִ גלײַכונג (7) פון (132) (פיִג. 25).

פּאָראויסב.: ג=מ; פעסטשט.: עס גיִלטן דיִ איִבעריגע 11 גלייכינגען (132).
באוויַיז: a) ג+א=2d, מ+נ=2d, ג+א=מ+נ (47); ג=מ, הייסט עס (51): א=נ (132=1); b) ג=נ און ג=מ, הייסט עס (47); ב=מ (132=2) c) מ=ל און ג=מ, הייסט עס (47) ל=ג (132=3); d) ג+ד=2d, מ+כ=2d, ג+ד=מ+כ (47) און ג=מ, הייסט עס (51) ד=כ (132=4); e) ג+א=2d, מ+כ=2d, ג+א=מ+כ (47) און ג=מ, הייסט עס (51) א=כ (132=5) f) ג=ב, מ=ל און ג=מ הייסט עס (47): ב=ל (132-6) g) ג+ד=2d, מ+נ=2d, ג+ד=מ+נ (47) און ג=מ. הייסט עס: (51) ד=נ (132=8); h) ג+א=2d און ג=מ; הייסט עס (52) מ+א=2d (132=9); i) מ+נ=2d, ג=מ, ג+נ=2d (52), ג=ב, הייסט עס (52): ב+נ=2d (132-10); k) מ+כ=2d און ג=מ, הייסט עס (52): ג+כ=2d (132=11); l) ג+ד=2d, ג=מ, מ+ד=2d (52), מ=ל הייכט עס: (52) ד+ל=2d (132=12).

אויפן זעלבן שטייגער וואלטן מיִר געקענט באַווײַזן אַלע גלײַכונגען, נעמענדיג פאַר א פּאָראויסבאַדונג אַ וועלכע עס איִז אַנדערע גלײַכונג פון (132).

134. **א**יִצט וועלן מיִר באַטראַכטן, ווי אַזוי די וויִנקלען באַשטיִמען די פּאַראַלעלקײַט פון דיִ גראָדע (129).

לערזאַך: ווערן צוויי גראָדע, וואָס ליגן אויף איין פלאַטע, געשניטן פון אַ דריטער מיִט גלייכע איִנעווייניגסטע בײַט־ווינקלען, דאַן זיינען די דאָזיגע גראָדע פּאַראַלעל, ד. ה. זיי

וועלן זיך ניט שניידן ווי ווייט מ'זאָל זיי ניט פאַרלענגערן פון ביידע זייטן (פיג. 25).

פאָראויסב.: PT שניידט AB און OE מיט ד=כ; פעסטשט.: AB||CE.

באוויי: די ווינקלען ד (AOX) און כ (OXE) זיינען גלייך און ליגן מיט זייערע איינאַרטיגע זייטן (OX און XO) פון פאַרשיידענע זייטן פון דער שניידליניע PT, לויט (127-ד) זיינען די זייטן AO און XE סימעטריש איינע מיט דער אַנדערער צום מיטנפונקט M פון דער שטרעקע OX, און צענטראַל סימעטרישע גראַדע זיינען פאַראַלעל (129-א) (זעה דעם באוויז אין 127-ג).

135 כדי די אינעווייניגסטע בייטווינקלען זאָלן זיין גלייך (און במילא די גראַדע AB און CE פאַראַלעל), איז גענוג, אַז וועלכע עס איז גלייכונג פון (132) זאָל זיין ריכטיג, ווי מיר האָבן עס באַוויזן אין (133); דעריבער שאַפן מיר באַלד עטלאַכע לייכט פאַרשטענדלאַכע —

שלוסאַצן: צוויי גראַדע, וואָס ליגן אויף איין פלאַטע, זיינען פאַראַלעל, אויב אַ דריטע גראַדע שניידט זיי אַזוי, אַז

א) די בייטווינקלען (אויסנווייניגסטע אָדער אינעווייניגסטע) **זיינען גלייך צווישן זיך** ד. ה. **א=נ** אָדער **ב=מ**, אָדער **ג=ל**, אָדער **ד=כ**

ב) די הינפווינכלען זיינען גלייך צווישן זיך: א=כ, אָדער **ב=ל**, אָדער **ג=מ**, אָדער **ד=נ**.

ג) די סומע פון די איינזייטיגע (אויסנווייניגסטע אָדער אינעווייניג.) **באַטרעפט** 2d ד. ה. **ג+כ**=2d, אָדער **ד+ל**=2d, אָדער **א+מ**=2d, אָדער **ב+נ**=2d.

136 **א**זוי ווי אַ גלייכקייט איז מעגלאַך נאָר צווישן איינאַרטיגע ווינקלען (ביידע שפיציגע, אָדער טעמפע) און 2d קען באַטרעפן די סומע פון פאַרשיידנאַרטיגע (איסער, ווען יעדער=d), קען מען דעם זאַץ (135) אַרויסזאָגן נאָך אַזוי: צוויי גראַדע וואָס ליגן אויף איין פלאַטע, זיינען פאַראַלעל, אויב זיי ווערן געשניטן פון אַ דריטער אַזוי, אַז:

א) אַלע שפיציגע ווינקלען זיינען צווישן זיך גלייך,

ב) אַלע טעמפע ווינקלען זיינען צווישן זיך גלייך,

ג) די סומע פון יעדן שפיציגן ווינקל מיט יעדן טעמפן, באַטרעפט 2d.

137 דער שלוסאַץ (129—א) פאַרהעלפט אונז צו לייזן פאָלגנדיגע געאָמעטרישע אויפשטעלונג: **דורך אַ געגעבענעם פונקט איסער אַ געגעבענער גראַדער ציהען אַ פאַראַלעלע צו איר**

פיג. 25) געגעבן איז די גראַדע CE און דער פונקט O איסער איר. געזוכט ווערט

א גראָדע, וואָס זאָל זיך ציהען דורך O פאראלעל צו CE. לייזונג: א צענט־ראל סימעטרישע מיט CE צו וועלכן עס איז פונקט וועט זיין פאראלעל צו CE (129־א). דעריבער ציהען מיר דורכן פונקט O א וועלכע עס איז גראָדע OX, וועלכע זאל שניידן CE אין א וועלכן עס איז פונקט X; ווייטער געפינען מיר דעם מיטנפונקט M פון דער שטרעקע OX (118־א), וועלכן מיר נעמען פאר דעם סימעטריצענטער. דורכן פונקט M ציהען מיר נאָך א וועלכע עס איז גראדע P″MP′, וועלכע שניידט CE אין P′. די שטרעקע MP′ לייגן מיר אָפּ פון דער צווייטער זייט פון פונקט M אויף דערזעלבער גראָדער ביז פונקט P″. די פונקטן O מיט X און P′ מיט P″ זיינען צענטראַל סימעטריש צו M (126־א*); O און P″ באשטימען פולקום די סימעטרישקייט און במילא די פאראלעלקייט פון AB צו CE. דיזעלבע אויפשטעלונג קען מען אויספירן אויפן סמך פון שלוסזאץ (129־ב).

138. כדי צו קענען באווייזן א גאנצע רייע ווייטערדיגע אייגנשאפטן פון פאראלעלע גראדע, מוזן מיר אננעמען א זאץ, וועלכן מיר באווייזן ניט: (43)

אקסיאמע: דורך א געגעבענעם פונקט, וואָס ליגט אויסער א געגעבענער גראָדער, קען מען ציהען צו דער דאָזיגער גראָדער ניט מער ווי איין פאראלעלע.

שלוסזאצן: א) א גראָדע, וועלכע שניידט איינע פון צוויי (אָדער מער) **פאראלעלע, שניידט אויך די צווייטע** (אָדער די איבעריגע); ווען ניט, וואָלט אויסגעקומען, אז דורכן ערשטן שניטפונקט ציהען זיך צוויי פאראלעלע צו דער צווייטער גראָדער, ווייל די שניידליניע מוז זיין צו דער צווייטער גראדער, אויב זי שניידט זי ניט.

ב) זיינען צוויי גראדע איינציגוויז פאראלעל צו איין און דערזעלבער דריטער, דאן זיינען זיי צווישן זיך אויך פאראלעל, צוליבן זעלבן גרונד ווי אין (א).

139. **לערזאץ** (פארקערט פון 134): **זיינען צוויי גראדע פאראלעל, דאן בילדן זיי מיט זייער שניידליניע**

I. **גלייכע אינעווייניגסטע בייטווינקלען,**

II. **גלייכע אויסנווייניגסטע בייטווינקלען,**

III. **גלייכע היפווינקלען,**

IV. **אינעווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען, וואס זייער סומע באטרעפט** 2d און

V. **אויסנווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען, וואס זייער סומע**

באַטרעפט 2d. (פיג. 25)
פאראויסב.: AB‖CE; PT—אַ שנײַדליניע;

פעסטשטעלט: **ד**=**ב** און אַלע איבעריגע 11 גלייכונגען פון (132).
באווײַז (דורכן היפוך): וואָלט **ד** ניט געווען גלײַך **ב**, דאַן וואָלט מען דורכן פונקט O געקענט ציהען אַ וועלכע עס איז אַנדערע גראָדע (′HH למשל) אזוי, אַז די אינעווייניגסטע בייטווינקלען זאָלן זײַן גלײַך. די נייגעצויגענע גראָדע וואָלט דאן געדאַרפט זײַן פאראלעל צו CE (לויט 134), ד. ה. דורך איין און דעמזעלבן פונקט O וואָלטן זיך געצויגן צוויי פאַראַלעלע (AB און ′HH) צו CE! אבסירד! (138). בלײַבט, הײַסט עס, אז די ווינקלען **ד** און **ב** קענען ניט זײַן אומגלײַך, זיי מוזן זײַן גלײַך. פון **ד**=**ב** לאָזן זיך שוין ארויסדרינגען (133) אַלע איבעריגע גלײַכונגען פון (132).

שלוסזאַץ: א) שטײט אַ גראָדע זיילרעכט צו איינער פון צוויי (אדער מער) פאַראַלעלע, דאַן שטײט זי זײַלרעכט אויך צו דער צווייטער (אָדער צו די איבעריגע).

ב) (פארקערט צו **א**): צוויי פאַראַלעלע גראָדע זיינען צענטראל סימעטריש צום מיטנפונקט פון יעדער שטרעקע, וואָס פאַרבינדט צוויי וועלכע עס איז זייערע פונקטן.

ג) (פאַרקערט צו 129-**ב**): צוויי פאראלעלע גראָדע זײַנען אקסיאל סימעטריש צו דער מיטנזײַלרעכטער פון דער שטרעקע, וועלכע שטײט זיילרעכטע צו זיי ביידע.

140. **ש**טיצנדיג זיך אויף דעם, וואָס איז געזאָגט געוואָרן אין (136), קענען מיר דעם לערזאַץ (139) אַנדערש פאָרמולירן נאך אזוי: זײַנען צוויי גראָדע פאראלעל, דאַן ווערן זיי געשניטן פון אַ דריטער אזוי, אַז: **א)** אלע שפּיציגע ווינקלען זיינען גלײַך צווישן זיך, **ב)** אַלע טעמפּע ווינקלען זײַנען גלייך צווישן זיך, **ג)** די סומע פון יעדן שפּיציגן מיט יעדן טעמפּ באַטרעפט 2d.

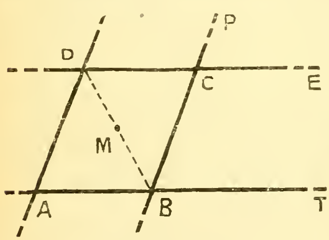
141. **לערזאַץ** (נעגאטיווער צו 134): **ווערן צוויי גראָדע, וואָס ליגן אויף איין פלאַטע, געשניטן פון אַ דריטער מיט אומגלײַכע בייטווינקלען, דאַן זײַנען די צוויי גראָדע ניט פאַראַלעל**, ד. ה. זיי שנײַדן זיך.

באווײַז (דורכן היפוך): וואָלטן די גראָדע יע געווען פאַראלעל, דאַן וואָלטן די בייטווינקלען געמוזט זײַן גלײַך (139), דאָס איז אָבער סותר אונזער פאָראויס־באַדונג; בלײַבט אַז די גראָדע זײַנען ניט פאַראַלעל.

א) **שלוסזאַץ: ש**טײט איינע פון צוויי גראָדע זײַלרעכט צו אַ דריטער און די צווייטע שנײַדט די דאָזיגע דריטע מיט אַ שפּיציגן אָדער טעמפּן ווינקל, דאַן יינען די ערשטע צוויי גראָדע ניט פאַראלעל, ד. ה. זיי שנײַדן איינע די אַנדערע.

142. **לערזאץ** (נעגאט-פארק. צו 134): זיינען צווי גראדע נים פאראלעל (ד. ה. שניידן זיי זיך), דאן בילדן זיי מיט זייער שניידליניע
א) אומגלייכע בייטווינקלען (אויסנווייניגסטע אדער אינעווייניגסטע)
ב) אומגלייכע היפווינקלען און
ג) איינזייטיגע ווינקלען (אויסנווייניגסטע אדער אינעווייניגסטע), וואס זייער סומע באטרעפט נים $2d$. באוויז (דורכן היפוך): וואלטן די בייטווינקלען געווען גלייך, דאן וואלטן די גראדע געמוזט זיין פאראלעל (134), דאס איז אבער סותר אונזער פאראויסבאדונג.

143. **לערזאץ: זיינען די זייטן פון צוויי ווינקלען פאראלעל, דאן זיינען די ווינקלען אדער גלייך** (ווען פאראלעל זיינען איינארטיגע זייטן 81) **אדער זייער סומע באטרעפט** $2d$ (ווען פארשיידנארטיגע זייטן זיינען פאראלעל) (פיג. 26) פאראויסב.: 1) $AD \parallel PC$ 2) $AB \parallel CE$ פעסטשט.: 1) $DAB = PCE$ אדער 2) $DAB + BCE = 2d$ באוויז: CP מוז שניידן AB ביי איר פארלייגערונג, און EC מוז שניידן AD (138-א) און דאן $PCE = CBT = DAB$ (III-139) ד. ה. $DAB = PCE$; (47) ווייטער: $PCE + ECB = 2d$ (94) און ווייל $PCE = DAB$ איז אויך $DAB + BCE = 2d$ (52).

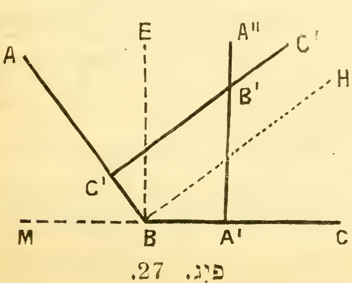


פיג. 26

מאך פון (143) א פארקערטן זאץ און באוויז זיין רייטלאבע אומטעגלאבקייט!

144. **לערזאץ: שטייען די זייטן פון איין ווינקל פערפענדיקולאר** (זיילרעכט) **צו די זייטן פון א צווייטן, דאן זיינען די ווינקלען אדער גלייך** (ווען זיילרעכט שטייען איינארטיגע זייטן), **אדער זייער סומע באטרעפט** $2d$ (ווען זיילרעכט שטייען פארשיידנארטיגע זייטן) (פיג. 27).

פאראויסב.; 1) $B'A' \perp BC$, 2) $B'C' \perp BA$;
פעסטשט.: 1) $ABC + A'B'C' = 2d$, 2) $A'B'C'' = ABC$; הילפליניעס: 1) $EB \perp BC$, 2) $HB \perp BA$ און 3) BM — די פארלייגערונג פון BC; פון דער לאגע פון די הילפליניעס שליסן מיר: $EB \parallel A'B'$ און $BH \parallel B'C'$ (ב — 129) און



פיג. 27

$EBH=A'B'C'$ (143);

באווייז: $EBH=ABM$,, ווייל: 1) $MBH-MBA=ABH=d$,
2) $MBH-EBH=MBE=d$ און (51)
3) $MBH-EBH=MBH-MBA$ און דערפֿון (50) $EBH=ABM$;
הײַסט עס: $A'B'C'=ABM$; אָבער $MBA+ABC=2d$ און דער פֿון:
$ABC+A'B'C'=2d$: און דאס איז דער ערשטער טייל פֿון דער פעסטשטעלונג:
ווייטער; $A'B'C''+A'B'C'=2d$ און דעריבער איז (47)
$ABC+A'B'C'=ABC+A'B'C''$ און (51): $ABC=A'B'C''$ און מיט
דעם איז באַוויזן דער צווייטער טייל פון דער פעסטשטעלונג.

145. לערזאַץ: פּאַראַלעלע שטרעקעס צווישן פּאַראַלעלע זײַנען גלײַך (פֿיג. 26)

פאראויסג.: 1) $AT \parallel DE$ און 2) $AD \parallel BP$: פעסטשט.: 1) $AB=CD$ און 2) $AD=BC$ הילפֿליניע DB מיטן מיטנפונקט M.

באווייז: AD מיט BC און אויך AB מיט DC זיינען צענטראל סימעטריש צו M (139 שלוסזאץ=ב) ביים אומדרייען BC און DC צוזאמען מיט BD ארום M אויף אַ האלבע אומדרייאונג (180°) וועט פונקט D דעקן B (אונטן) און B וועט דעקן D (אויבן) און BC וועט דעקן DA און $BA-DC$ און פונקט C וועט דעקן A (84) און דאמאלסט מוז זיין $AD=DC$ און $AD=BC$ (74).

שלוסזאַצן: א) אַלע פונקטן פון איינער פון צוויי פּאַראַלעלע זיינען גלייך דערווייטערט פון דער צווייטער (116)(129=ב)

ב) א פּאַראַלעלע צו א געגעבענער גראַדער איז דער געאָמעטרישער אָרט פון פונקטן, וואָס זיינען גלייך דערווייטערט פון דער דאָזיגער גראָדער אויף אַ מרחק, וואָס איז גלייך דער לענג פון דער שטרעקע, וועלכע שטייט זיילרעכט צו ביידע.

146. אויפגאבעס. (פיג. 25). באַווייזן:

$AB \parallel CE$ באווייזן, אז די ביסעקטריסעס פון יעדער פאר אינעווייניגע ווינקלען שניידן זיך מיט א רעכטן ווינקל (אָנווייזונג: דורכן שניטפונקט ציהען א $\parallel$ צו די געגעבענע) 2) באווייזן, אז די ביסעקטריסעס פון יעדער פאָר היפּווינקלען זיינען $\parallel$-על. 3) באַווייזן, אַז די ביסעקטריסעס פון יעדער פאר בייטווינקלען זיינען פאראלעל 4) א וועלכער עס איז פונקט פון צווישן די פאראלעלע AB און CE (פיג. 25), למשל M, איז פֿארבונדן מיט צוויי פונקטן פון די פאראלעלע, למשל A און C פון איין זייט פון דער סעקאנטע; באַווייזן, אז $AMC=MAB+MCE$ (זעה אנווייזונג אין (א) 5) זעה די אויפגאבע ד. דער פונקט פון דער סעקאנטע ליגט איבער AB, למשל אין P; באווייזן

אז APC=PCE−PAB (זעה די אנווייזונג). 6) זעה די אויפגאבע ד. דער פונקט פון דער סעקאנטע ליגט אונטער CE, למשל אין T, באַווייַזן, מוז TCE−TAB=ATC. צו האט צו די לעצטע דרייַ אויפגאבעס א שייַכות דאס וואס מיר האָבן געזאגט אין (75)? 7) באווייז אויף דער פיג. 25 אז א+ל=2d; ב+כ=2d 8) און פארקערט: איז א+ל=2d דאן אין A.B‖CE **אויסרעכענונג:** (פיג. 2) 9) צוויי גראדע AB און CE ווערן געשניטן פון PΓ אַזוי, אז ג=$\frac{6}{5}$d און ב=$\frac{2}{3}$ פון ג צו איז AB פאראַלעל צו EC? אין אלע ווייטערדיגע אויפגאבעס איז אנגענומען, אז CE פאראלעל BA. ווי גרויס זייַנען די איבעריגע ווינקלען, ווען 10) ב=$\frac{4}{3}$d; 11) ב=2 נ 12) א=$\frac{1}{2}$ פון ל 13) ג+ט+נ=$\frac{13}{5}$d 14) מ−ד=40° 15) מיט וועלכן ווינקל ווערט CE געשניטן פון דער ביסעקטריסע פון ג? 16) די ביסעקטריסע פון ל שנייַדט AB מיט א ווינקל פון 60°; ווי גרויס זייַנען די ווינקלען? **אויפשטעלונג** 17) געגעבן איז א ווינקל און א פונקט צווישן זייַנע זייטן. דורכן פונקט ציהען צוויי גראדע, וועלכע זאלן זיך שנייַדן מיטן זעלבן ווינקל ווי דער געגעבענער.

קאפיטל ה.

דרייעקן.

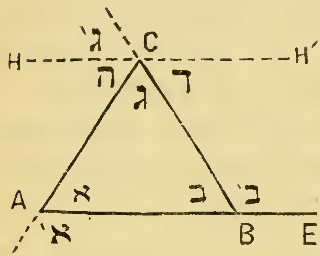
אַלגעמיינע אייגנשאַפטן.

I

147. **דערקלערונג:** אַ פיגור, וועלכע איז באַגרעניצט דורך דרייַ גראָדע, וועלכע שנייַדן זיך אין דרייַ פונקטן, הייסט **דרייַעק** (פיג. 28). אנשטאָט דעם וואָרט דרייַעק באנוצט מען דעם סימן △. די שניטפונקטן (A, B און C) פון די גראָדע הייסן **שפיצן**, אָדער **עקן**, פון דרייַעק, די שטרעקעס (AB, BC און AC) צווישן די שפיצן — **זייַטן** פון דרייַעק. די שפיצן ווערן באַצייכנט דורך גרויסע פונקטן, די זייטן—דורך קליינע בײדע ענדפונקטן, די ווינקלען—דורך זייערע שפיצפונקטן, אָדער דורך דריי אותיות (80). איינע אַ באַליביגע זייַט פון 3עק, וועלכע ווערט מייסטנטיילס געצייכנט וואַגראָד אויפן פאפיר ווערט אָנגענומען פאַר אַ **גרונדזייַט**, (AB) די איבעריגע צוויי זייַטן הייסן דאַן—**לענדן** (AC און BC). די ענדפונקטן פון דער גרונדזייַט הייסן—גרונדפונקטן, אָדער **גרונדשפיצן**, (A און B),

די ווינקלען פון אירע בײדע זײַטן—**גרונדווינקלען** (**א** און **ב**), דער פונקט אַנטקעגן דער גרונדזײַט, דאַכפונקט, אָדער **דאַכשפּיץ**, (C). דער ווינקל—**דאַכווינקל** (ג). **די זײַטן און ווינקלען** פון דרײַעק, הײסן — זײַנע **עלעמענטן.**

148. די שייכות צווישן די לײַנגען פון די זײַטן פון יעדער 3עק, ווערט אויס געדריקט אין אַזאַ—



פיג. 28

לערזאַץ: יעדער זײַט פון אַ דרײַעק איז קלענער פון דער סומע פון די איבעריגע צוויי און גרעסער פון זייער דיפערענץ. (פיג. 28)

פאראויסב.: ABC אַ דרײַעק;

פעסטשט.: 1) $AB < BC+AC$, און

2) $AB > AC-BC$;

באַווײַז: AB איז אַ גראָדע צווישן די פונקטן A און B, ACB—אַ געבראָכענע צווישן זיי (70) לויט (114) איז $AB < BC+AC$, דאָסזעלבע $AC > AB+BC$ א. א. וו.; ווען מיר אַראָפּרעכענען פון בײדע טײלן פון דער לעצטער אומגלײַכקייט צו BC, דאַן באַקומען מיר: $AB+BC-BC > AC-BC$ אָדער $AB < AC-BC$!

באמערקונג: די לײַנג פון יעדער זײַט פון אַ דרײַעק וועלן מיר באַצייכענען מיט אַ **קלײַנעם** לאַטײנישן אות פון זעלבן קלאַנג, ווי דער אות פון ווינקל אַנטקעגן איר: די זײַט BC—דורך a, AC דורך b, AB—דורך c.

לויט דער געגנזײַטיגער גרויס פון זײַנע זײַטן, קען אַ 3-עק זײַן:

א) אַ **גלײַכזײַטיגער** 3עק — ווען אַלע דרײַ זײַטן זײַנען גלײַך לאַנג, (פארקירצט: גלײכזט.)

ב) אַ **גלײַכלענדיגער** 3עק, ווען נאָר צוויי זײַנע זײַטן זײַנען גלײַך לאַנג; אין דעם פאַל ווערט מײַסטנטײלס די דריטע זייט גענומען פאַר אַ גרונדזײַט;

ג) אַן **אומגלײַכזײַטיגער** 3עק, אָדער פשוט **דרײַעק**, ווען די זײַטן זײַנען פאַרשיידן לאַנג.

ד) באַשטימונג: די סומע פון די לײַנגען פון אַלע דרײַ זײַטן פון אַ 3עק הייסט — **פּערימעטער** פון דרײַעק, וואָס באַדײַט: די אַרומיגע מאָס. מיר וועלן שרייבן פאַרקירצט —**פּרימטר.**

149. דער פאָלגנדיגער זאַץ באהאנדלט די שייכות צווישן די ווינקלען פון אַ 3עק (פיג. 28)

לערזאַץ: די סומע פון די ווינקלען אין יעדער דרייעק באַטרעפט צוויי רעכטע ווינקלען.

פאראויסז.: ABC—אַ דרייעק; פעסטשט.: **א**+**ב**+**ג**=2d;

הילפליניע AB||HH′ געצויגן דורכן פונקט C;

באווייז: **ד**+**ג**+**ה**=2d (96); **ד**=**ב** און **ה**=**א** (I-139); דעריבער **א**+**ב**+**ג**=2d (52).

שלוסזאַצן: א) די סומע פון יעדע צוויי ווינקלען פון א 3עק באַט-רעפט ווייניגער ווי 2d,

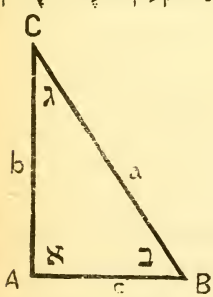
ב) אין א 3עק קען זיין נאָר איין רעכטער אָדער טעמפּער ווינקל (93-**א**)

ג) זיינען צוויי ווינקלען פון אַ 3עק געגעבן, דאַן איז דער דריטער אויך באשטימט,

ד) זיינען צוויי ווינקלען פון איין 3עק, איינציגוויז, אָדער צונויפגעלייגט, גלייך צו צוויי ווינקלען, אָדער צו זייער סומע, פון אַ צווייטן 3עק, דאַן זיינען די דריטע ווינקלען פון די ביידע 3עקן אויך גלייך. (51).

150. לויט דער גרויס פון די ווינקלען קען אַ דרייעק זיין:

א) אַ **רעכטווינקלדיגער**—ווען איינער פון זיינע ווינקלען איז אַ רעכטער (89-**ד**) (פיג. 29); אין דעם פאַל הייסט יעדע זייט וואָס ליגט ביים רעכטן ווינקל—**קאַטעטע**, די זייט, וואָס ליגט אַנטקעגן דעם רעכטן ווינקל—**היפּאָטענוזע**.



פיג. 29.

ב) אַ **שפּיצווינקלדיגער** — ווען אַלע זיינע ווינקלען זיינען שפּיציגע (93-**א**),

ג) אַ **טעמפּווינקלדיגער** — ווען איינער פון זיינע ווינקלען איז אַ טעמפּער (93-**א**).

די גרויס פון יעדן ווינקל פון אַ דרייעק וועלן מיר באַצייכענען מיט אַ אידישן אות אַזוי: די גרויס פון ווינקל A דורך אַן **א**, פון B - **ב**, פון C—**ג**.

ד) באַשטימונג: דער ווינקל צווישן איין זייט פון 3עק און דער פאַר-לענגערונג פון אַ צווייטער זייט, הייסט — **דרויסנווינקל** פון 3עק, למשל CBE אין פיג. 28. עס איז קלאָר פון דער צייכענונג, אַז ביידע דרויסנ-ווינקלען, וועלכע ליגן ביי יעדן שפּיץ פון 3עק, זיינען גלייך צווישן זיך (102), און אַז יעדער ווינקל פון 3עק איז מיטגעשטרעקט (89-**ג**) צו זיין דרויסנווינקל. די גרויס פון דרויסנווינקל וועלן מיר באַצייכענען מיטן זעלבן אות ווי דעם ווינקל, ביי וועלכן ער ליגט, נאָר מיט אַ שטריכל, למשל **ב′** (לעז: בית שטריך). די שייכות צווישן די ווינקלען פון אַ 3עק און **אַ** וועלכן

עס איז דרויסנווינקל, ווערט באהאנדלט אין באלדיגן זאץ.

151. **לערזאץ: יעדער דרויסנווינקל פון א דרייעק איז גלייך דער סומע פון די אינעווייניגסטע ווינקלען, ניט מיטגעשטרעקטע מיט אים.** (פיג. 28)

פאראויסב.: CBE — א דרויסנווינקל פון דרייעק ABC; פעסטשט.: ב׳=א+ג

באווייז: ב+ב׳=2d (94); א+ב+ג=2d (149); ב+ב׳=א+ב+ג (47); און דערפון ב׳=א+ג (51).

שלוסזאצן: א) יעדער דרויסנווינקל פון א דרייעק איז גרעסער פון יעדן אינעווייניגסטן ווינקל ניט מיטגעשטרעקטן מיט אים (46). דער אינעווייניגסטער ווינקל פון 3עק, וואס ליגט ביים דרויסנווינקל, קען זיין גרעסער פון אים (א טעמפער למשל)

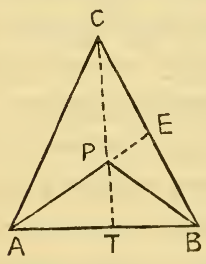
ב) די סומע פון אלע דריי דרויסנווינקלען פון א 3עק באטרעפט 4d.

א+א׳+ב+ב׳+ג+ג׳=3×2d=6d; א+ב+ג=2d, בלייבט:

א׳+ב׳+ג׳=4d.

152. **עווקליד** (59) זאגט אין ערשטן בוך פון זיינע עלעמענטן (אזוי הייסן זיינע פארשונגען): (פיג. 30)

לערזאץ: פארבינדן מיר א וועלכן עס איז אינעווייניגסטן פונקט פון א 3עק מיט די ענדעפונקטן פון זיינער א זייט, דאן איז די סומע פון די צוויי (נייע) שטרעקעס (די לענדן פון אינעווייניגסטן דרייעק) קלענער פון דער סומע פון די איבעריגע צוויי זייטן (פון געגעבענעם 3עק), זיי שליסן אבער איין א גרעסערן ווינקל (ווי די לענדן פון געגעבענעם 3עק). לאמיר עס באווייזן.



פיג. 30

פאראויסב.: P א פונקט אין דעם 3עק ABC

פעסטשט.: 1) $AC+CB > AP+PB$,

2) $\sphericalangle APB > ACB$

הילפליניעס: PE — די פארלייגנגערונג פון AP און CPT — א גראדע.

באווייז: 1) $AP+PE < AC+CE$, 2) $PB < PE+EB$ (148),

3) $AP+PE+PB < AC+CE+PE+EB$ (56), אדער

4) $AP+PB < AC+CE+EB$ און

5) $AP+PB < AC+CB$ (52)!; וואס אנבאלאנגט די ווינקלען, איז:

$ACT < APT$ און $TCB < TPB$ (151-א); לויט (56) בלייבט:

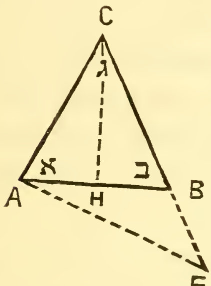
$ACT+TCB < APT+TPB$ אדער (52) $\sphericalangle ACB < APB$!

153 די פאלגנדיגע זאצן באהאנדלען די שײַכות צווישן די ווינקלען מיט די זײַטן פון א דרייעק.

לערזאַץ: אין אַ דרײַעקליגן אַנטקעגן גלײַכע זײַטן גלײַכע ווינקלען (פיג. 31)

פאראויסבּ: אין דרײַעק ABC איז AC=CB;

פעסטשט. **ב=א**



פיג. 31

הילפליניע: CH—די ביסעקטריסע פון א ווינקל C, ד. ה. ∢ ACH=HCB

באווײַז: CA מיט CB זײַנען סימעטריש צו CH (Π=ב=112), ראַזועלבע די פונקטן B מיט A (א=112) ד. ה. ביים אומקנײַטשן די פלאטע ארום CH, וועלן זיך דעקן CB מיט CA און HB מיט HA (H בלייבט אויפן אָרט: 110=ג), אויב אזוי זיינען די ווינקלען **א** און **ב** גלײַך! (83). מיר זעהען אויך, אז די ווינקלען CHA און CHB וועלן זיך דעקן, ד. ה. זיי זיינען אויך גלייך; ווייל זיי זיינען אָבער מיט־געשטרעקטע, איז יעדער פון זיי א רעכטער (89=ד)

שלוסזאַצן: א) אין אַ גלײַכלענדיגן דרײַעק זײַנען די גרונדווינקלען גלײַך צווישן זיך.

ב) די ביסעקטריסע פון דאַכווינקל אין אַ גלייכלענדיגן דרייעק איז די מיטנזיילרעכטע פון דער גרונדזייט און פארק.

ג) די מיטנזײַלרעכטע צו דער גרונדזייט פון א גלײַכלענדיגן דרײַעק גייט דורך דעם שפיץ פון דאַכווינקל און טײַלט אים אויף דער העלפט, ווען ניט וואלטן מיר לויט (117=ג, 112=ג) סיתר געווען אונזער פאראויסבאדונג.

ד) איין געגעבענער ווינקל פון א גלייכלענדיגן דרייעק באשטמיט שוין די גרויס פון די איבעריגע, ד. ה. איז אונז איינער באקאנט, דאן זיינען די איבעריגע במילא באקאנט (148).

ה) אין א גלײַכזײַטיגן דרײַעקה זײַנען אלע ווינקלען גלייך צווישן זיך און יעדער באטרעפט $^2/_3$ **פון א רעכטן** ווינקל (60°) (א=148), ווייל א גלײַכזייטיגער דרייעק קען באטראכט ווערן אין אלע לאגעס פאר א גלייכלענדיגן.

154. **לערזאץ** (נעגאטיוו צו 153): **אין אַ דרײַעקה ליגן אנטקעגן אומגלײַכע זײַטן אומגלייכע ווינקלען, אזוי, אז אנטקעגן**

דער גרעסערער זייט ליגט דער גרעסערער ווינקל (פיג. 31)
פאראויסב.: AEC—אן אומגלייכזייטיגער דרייעק און $AC > CE$;
פעסטשט.: $CEA > CAE \sphericalangle$.
הילפשטרעקס: $CB=AC$ און AB; באווייז: 1) ב=א $(CA=CB)$, 2) ב איז גרעסער פון AEC (150=א), הייסט עס 3) א $>$ AEC, 4) א $> CAE$ (46), בלייבט 5) $CEA > CAE$ (48)

155. לערזאץ (פארקערט צו 153): אין א דרייעק ליגן אנטקעגן גלייכע ווינקלען גלייכע זייטן (פיג. 31).

פאראויסב.: דרייעק ABC: ב=א; פעסטשט.: $CA=CB$; באווייז: צווישן CA און CB איז מעגלאך נאר איינער פון דריי שייכותן: אדער $CA=CB$, אדער $CA > CB$, אדער $CA < CB$; ביידע לעצטע פאלן זיינען אוממעגלאך, ווייל ראמאלסט וואלט לויט (154) געדארפט זיין אדער ב > א, אדער ב < א און די ביידע שייכותן זיינען סותר אונזער פאראויסבאדונג (ב=א); בלייבט דער דריטער פאל, אז $AC=CB$

אזא שטייגער צו באווייזן די ריכטיגקייט פון וועלכער עס איז שייכות דורך אויסשליסן אלע איבעריגע מעגלאכע פאלן וועלן מיר אט באלד באנוצן ביים פאלגנדיגן זאץ.

156. לערזאץ (נעגאט. פארק. צו 152): אין א דרייעק ליגן אנטקעגן אומגלייכע ווינקלען אומגלייכע זייטן, אזוי, אז אנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל ליגט די גרעסערע זייט (פיג. 31)

פאראויסב.: $CEA > CAE \sphericalangle$; פעסטשט.: $CA > CE$; באווייז: CE קען ניט זיין גלייך אדער קלענער פון CA, ווייל ראמאלסט וואלט ווינקל CAE געדארפט זיין אדער גלייך (153) אדער קלענער (154) פון CEA; ביידע פאלן זיינען סותר אונזער פאראויסבאדונג, צוליב וואס מיר מוזן זיי אפווארפן; בלייבט אז $CA > EC$, ווייל נאך א מעגלאכע שייכות צווישן זיי קענען מיר זיך ניט פארשטעלן.

שלוסזאצן: א) אין א רעכטווינקלדיגן דרייעק איז די היפאטענוזע די גרעסטע זייט, ווייל זי ליגט אנטקעגן דעם גרעסטן ווינקל. (149=ב)

ב) אין א טעמפווינקלדיגן דרייעק ליגט די גרעסטע זייט אנטקעגן דעם טעמפן ווינקל.

157. איפגאבעס: געגעבן איז א דרייעק בכלל!

1) איין זייט באטרעפט 5 צל., די צווייטע 7 צל., ווי לאנג קען זיין די דריטע? צווישן וועלכע גרעניצן קען זיך ענדערן די לייננג פון דער דריטער?

2) צו איז מעגלאך אַז איין זייט זאָל זיין 1 אַרש. די לייִנג, די צווייטע —
12 ווערשק. און די דריטע—5 צל? 3) דער ווינקל **א** באַטרעפט $^5/_{12}d$
ב $^7/_{15}d$, ווי גרויס איז **ג**? 4) צו איז מעגלאך אַז **א** זאָל אנטהאלטן
58°, **ב**—30°, **ג**—40°? 5) **א** זאָל אנטהאלטן 60°, **ב**—70°, **ג**—80°?
6) באַווייזן, אַז יעדער זייט איז קלענער פון דער העלפט פון דעם פּרימעטר!
וואָס איז דאָס פאַר אַ דרייעק, אויב: 7) איין ווינקל איז
גלייך דער סומע פון די איבעריגע? 8) איין ווינקל איז גרעסער פון
דער סומע פון די איבעריגע? 9) יעדער ווינקל איז קלענער פון דער
סומע פון די איבעריגע? 10) דער דרויסנווינקל **א'** איז גלייך **א**?
11) דער ווינקל צווישן די ביסעקטריסעס פון **ב** און **ג** באַטרעפט $1^1/_2d$?
12) דער ווינקל צווישן די ביסעקטריסעס פון **ב'** און **ג'** באַטרעפט 45°?
13) די דרויסנווינקלען **א'** און **ב'** זיינען גלייך? 14) די דרויסנווינ-
קלען **א'**, **ב'** און **ג'** זיינען גלייך צווישן זיך? **געגעבן איז אַ**
גלייכלענדיגער דרייעק! 15) דער פּרימטר באַטרעפט 4 פס. 5 צל.,
די גרונדזייט—$^3/_4$ אַרש., ווי לאַנג איז דער לענד? 16) איין זייט באַ-
טרעפט 26 צל., די צווייטע 12 צל., וועלכע פון זיי איז דער לענד?
17) דער פּרימטר באַטרעפט 1 אַרש. 7 צל., די דיפערענץ פון צוויי זייטן—
5 צל., ווי לאַנג זיינען די זייטן? 18) איין גרונדווינקל באַטרעפט 30°
ווי גרויס זיינען די איבעריגע? 19) דער דאַכווינקל באַטרעפט $^3/_4d$,
ווי גרויס זיינען די איבעריגע? 20) דער דרויסנווינקל ביים דאַכפּונקט
באַטרעפט $^7/_8d$, ווי גרויס זיינען די ווינקלען? 21) באַווייזן אַז די
ביסעקטריסע פון דרויסנווינקל ביים דאַכפּונקט איז || צו דער גרונדזייט?
22) די מיטנזיילרעכטע פון לענד AC שניידט דעם לענד BC אין פונקט
P, דער פּרימטר פון גאַנצן ABC באַטרעפט 64 צל. דער פּרימטר פון
APB—38 צל.; ווי לאַנג איז AC? 23) דער דאַכווינקל באַטרעפט
$^2/_5d$; באַווייזן אַז די ביסעקטריסע פון אַ גרונדווינקל שפּאַלט דעם גאַנצן 3עק
אין צוויי קלענערע גלייכלענדיגע 3עקן 24) צו קען די גרונדזייט זיין
3 מאָל אַזוי לאַנג ווי דער לענד? 25) ווי גרויס קען **ניט** זיין אַ
גרונדווינקל 26) פאַרוואָס מוזן די דרויסנווינקלען ביי די גרונדשפּיצן
זיין טעמפּע? 27) דער פּרימטר באַטרעפט 18 צל. און אַלע זייטן
גאַנצע צאָלן; ווי גרויס קענען זיי זיין? **אויפשטעלונג!**
28) געגעבן איז אַ גראָדע און צוויי פּונקטן פון פאַרשיידענע זייטן אירע;
אויף דער גראָדער געפינען דעם פּונקט, וואס זאָל זיין אַמווייניגסטן דערווייטערט
פון די געגעבענע? (114, 148); 29) די זעלבע פאָדערונג ווי אין

פּריהערדיגער נאָר די פּונקטן ליגן פון איין זייט פון דער גראָדער? (118־ה, 111־ב, 114); 30) דיזעלבע לאגע פון די פונקטן ווי אין פּריהערדיגער; אויף דער גראָדער געפינען דעם פּונקט, וואָס די דיפערענץ פון זיינע שטרעקעס ביז די צוויי געגעבענע פּונקטן זאָל זיין די גרעסטע? (148,46,71,70).

158. אויסער די אויבנדערמאנטע (147) עלעמענטן פון 3עק, זיינע זייטן און ווינקלען, האָבן מיר נאָך צו באטראכטן עטלאַכע שטרעקעס פון גראָדע ליניעס, וועלכע גייען ארויס פון זיינע שפּיצפּונקטן און שניידן די אנטקעגנדיגע זייטן און וועלכע בילדן אויך די עלעמענטן פון 3עק.

באשטימונגען: א) א זיילרעכטע וועלכע איז אראפּגעלאָזן פון א שפּיצפּונקט פון 3עק אויף דער אנטקעגנדיגער זייט (אדער איר פאַרלייגערונג!) הייסט־די **הויכליניע** פון דרייעק, אדער פּשוט די **הויך**. עס איז קלאָר, אז א 3עק פאַרמאָגט דריי אזעלכע שטרעקעס (3 שפּיצפּונקטן!). די פוספּונקטן פון די הויכליניעס וועלן מיר באצייכענען מיט די אותיות H_1, H_2 און H_3, (לעזט האָ איינס, האַ צוויי און א. א. וו) לויט דעם פון וועלכן שפּיצפּונקט זיי זיינען אראָפּגעלאָזן: פון A, B אדער C; די לייגנגען פון די הויכליניעס וועלן מיר באַצייכענען דורך די אותיות־h_1, h_2 און h_3 לויטן זעלבן שטייגער. אין א רעכטווינקלדיגן 3עק פאלן צוזאמען צוויי הויכליניעס מיט זיינע קאַטעטעס (פג.29).

ב) די שטרעקע, וועלכע פאַרבינדט א וועלכן עס איז שפּיצפּונקט פון 3עק מיט דעם מיטנפּונקט פון דער אנטקעגנדיגער זייט, הייסט—די **מיטנליניע**, אדער אויף לאַטייניש—**מעדיאנע** פון דער דאָזיגער זייט. די פוספּונקטן פון די מעדיאנעס וועלן מיר באצייכענען אויפן זעלבן שטייגער ווי אין (א) מיט די אותיות M_1, M_2 און M_3 זייערע לייגנגען: m_1,m_2 און m_3

ג) נאָך קען מען ציהען די **ביסעקטריסע**(89־ב) פון יעדן ווינקל פון 3עק. די פוספּונקטן פון די ביסעקטריסעס וועלן מיר באצייכענען מיט B_1, B_2 און B_3 זייערע לייגנגען: b_1, b_2 און b_3 לויטן זעלבן שטייגער ווי אין (א)

ד) די שטרעקע, וועלכע פאַרבינדט צוויי מיטנפּונקטן פון צוויי זייטן פון 3עק, הייסט־**מיטלסטע שטרעקע** פון 3עק, וועלכער פאַרמאָגט אזוינע 3. פון (ב) איז קלאָר, אז די ענדפּונקטן פון די דאָזיגע מיטלסטע שטרעקעס וועלן זיין M_1,M_2 און M_3; זייערע לייגנגען וועלן מיר באצייכענען מיט d_1,d_2 און d_3, לויט דעם, אַנטקעגן וועלכן שפּיצפּונקט זיי ליגן, ווי אין (א).

II קאָנגרוענץ (דעקיגקייט) פון דרייעקן.
פיר מערקווירדיגע פּונקטן פון דרייעק.

159. לאמיר איצט צוטרעטן צום פאַרגלייכן דרייעקן איינעם מיטן אנדערן דערביי קענען מיר **פאַרגלייכן אדער די גרויס** פון אלע זיי־

ערע עלעמענטן (147, 158) **אָדער** נאָר **זייער געשטאַלט**. אַזוי למשל זיינען צוויי גלייך גרויסע אָפּבילדונגען פון איין און דעמזעלבן געגנשטאַנד גלייך גרויסע פיגורן; ווען מיר אָבער איינעם פון די בילדער פאַרקלענערן, דאַן וועט דער דאָזיגער פאַרקלענערטער בילד האָבן **דיזעלבע געשטאַלט** ווי דער גרויסער, אָבער **ניט דיזעלבע גרויס**. דערווייל וועלן מיר פאַרגלייכן נאָר די גרויס פון פיגורן.

באַשטימונג: פיגורן, וועלכע מ'קען אַרופלייגן (אָדער זיך פאָרשטעלן אַרופגעלייגט) איינע אויף דער אַנדערער אַזוי, אַז אַלע זייערע עלעמענטן זאָלן זיך צונויפגיסן, פאַרדעקן, הייסן — **קאָנגרועטע**, אָדער **דעקיגע**, פיגורן. **קאָנגרועטע**, דעקיגע פיגורן **הייסן גלייך** סיי לויט זייער גרויס, סיי לויט זייער געשטאַלט. איינציגווייז באַטראַכט, אונטערשיידן זיך קאָנגרועטע (דעקיגע) פיגורן איינע פון דער אַנדערער נאָר מיט זייערע לאַגעס אין רוים (אָדער אויף דער פלאַטע, אויף וועלכער זיי ליגן ביידע).

ווען די ליניעס וועלכע באַגרעניצן די פיגורן, זיינען גראָדע, איז צום דעקן גענוג, אַז אַלע זייערע שפּיצפּונקטן (ד. ה. די שניטפּונקטן פון די גראָדע) זאָלן זיך דעקן, ווייל דאַן וועלן זיך די גראָדע בממילא דעקן (73] און אויך די ווינקלען צווישן זיי (84).

דעקן זיך צוויי פיגורן. ביים אַרופלייגן זיי איינע אויף דער אַנדערער דאַן זאָגן מיר: **די פיגורן שטימען איין אין אַלע זייערע עלעמענטן** (ווינקלען, זייטן א. א. וו.) יעדער עלעמענט (זייט, ווינקל, א. א. וו.) הייסט איינשטימונג מיט יענעם, וועלכן ער דעקט ביים צונויפלייגן די פיגורן די דעקיגקייט פון פיגורן ווערט באַצייכנט מיטן סימן $\cong$, וואָס באַדייט: גלייך לויט דער גרויס פון אַלע עלעמענטן (=), און גלייך לויט דער געשטאַלט (∽)

160. **ד**אָס פאַרדעקן איין פיגור מיט דער צווייטער, כדי אויסצופאָרשן זייער קאָנגרועניץ, קענען מיר אויספירן אויף וועלכן שטייגער מיר ווילן, דורך דרייאונג אַרום אַן אַקס (87), אַרום אַ פּונקט (86), אָדער אַנדערש ווי: לאָמיר אָננעמען, אַז צוויי גראָדליניקע פיגורן האָבן זיך שוין געדעקט, ד. ה. מיר האָבן אַזוי צונויפגעלייגט די פלאַטעס (אָדער די טיילן פון איין פלאַטע), אויף וועלכע די פיגורן זיינען געצייכנט, איינע מיט דער אַנדערער, אַז אַלע עלעמענטן פון די צוויי פיגורן (זייטן, ווינקלען א. א. וו.) האָבן זיך צונויפגעגאָסן. איצט שטעלן מיר זיך פאָר, אַז מיר הויבן אָפּ איינע פון די פלאַטעס (די אויבערשטע, למשל) פון דער צווייטער (דער אונטערשטער) אַזוי, אַז די אָפּגעהויבענע פלאַטע זאָל זיך דרייען אַרום דער גראָדער, אויף וועלכער עס האָבן זיך צונויפגעלייגט צוויי וועלכע עס איז איינשטימיגע זייטן פון ביידע

פיגורן (וועלכע בילדן די אַקס 87). די זעלבע דרייאונג פירן מיר ווייטער ביז בײַדע פלאַטעס וועלן זיך אויסלייגן אויף אײנער (פיג. 32: I און III). פון דער דאָזיקער דרייאונג אַרום דער אַקס (דעם אַריבערטראָגן אײַנגאַנצלאַך פון איין אָרט פון רוים אין צווייטן) וועלן זיך ניט ענדערן סיי די גרויס, סײַ די געשטאַלט און פאָרם פון די פיגורן (88). דרייענדיק די פיגורן אַרום דערזעלבער אַקס צוריק אין דער פריהערדיקער לאַגע, אומקערנדיק זייער פלאַטע אַרום דער אויבנדערמאָנטער גראָדער, וועלן מיר זיך איבערצײַגן, אַז די פיגורן דעקן זיך ווידער ווי בײַם אָנהייב, ד. ה. (108).

דערהלערונג: דעקיקע גראָדליניקע פיגורן זײַנען סימעטריש אײנע מיט דער אַנדערער צו יעדער פון זייערע אײַנשטימיקע זײַטן, בשעת די דאָזיקע זײַטן זײַנען צונויפגעלייגט מיט זייערע אײַנשטימיקע שפּיצן. ווען ניט, קען מען די אײַנשטימיקע זײַטן צונויפלייגן אַזוי, אַז די פיגורן, זײַענדיק בכלל דעקיק, וועלן זיך ניט דעקן. שטיצנדיק זיך אויף דער סימעטרישקייט פון דעקיקע פיגורן, וועט אונז לײַכט זײַן צו באַווײַזן די קאָנגרועניץ פון דרײַעקן, למשל, ווען די דאָזיקע 3עקן שטימען איין נאָר אין עטלאַכע זייערע עלעמענטן. דערצו דאַרפן מיר זיי גאָר ניט אַרויפלייגן אין דער אמתן איינעם אויף דעם אַנדערן. עס איז גענוג צו באַווײַזן, אַז צוליב זייערע פאָראויסגעגעבענע אײַנגנשאַפטן וועלן זיין זיך מוזן דעקן אויב מיר וועלן זיי אַרופלייגן איינעם אויף דעם אַנדערן, ד. ה. זיי וועלן זיין קאָנגרועט. די ווייטערדיקע זאַצן רעכענען אויס די דאָזיקע איגנשאַפטן, וועלכע מיר מוזן האָבן פאָראויס.

16! לערזאַץ. שטימען איין צוויי דרייעקן אין צוויי זייערע זײַטן און אין דעם ווינקל, וואָס ליגט צווישן זיי, דאַן זײַנען די דרייעקן קאָנגרועט (דעקיק און גלייך) פיג. 32.

פאָראויסב.: אין די געגעבענע דרײַעקן ABC און A′B′C′ איז:

1) AB=A′B′,

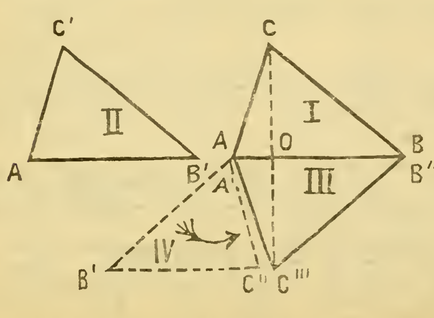
2) AC=A′C′,

3) ∢ A=A′

פעסטשט.:

ABC≅C′B′C′

באַווײַז: מיר לייגן צונויף אין פאָר אײַנשטימיקע זײַטן (AB און A′B′)



פיג. 32.

אויף איין גראָדער אַזוי, אַז די אײַנשטימיגע ווינקלען (A און A′) זאָלן בילדן ביװוינקלען. (89-א) (לאַגע I און III פיג. 32). איצט איבערצײַגן מיר זיך, אַז די פונקטן C און C′ זײַנען סימעטריש (112-ב און א און פּראָוויסב. 2 און 3), ד. ה. זיי וועלן זיך דעקן בײַם אומדרייען ארום דער גראָדער, אויף וועלכער מיר האָבן צונויפגעלייגט צוויי אײַנשטימיגע זײַטן. די שטרעקעס AC מיט A′C′ און BC מיט B′C′ ווי אויך די ווינקלען ב מיט ב′ און ג מיט ג′ וועלן זיך במילא דעקן און זײַן גלייך (74, 83).

שלוסאַצן: א) רעכטווינקלדיגע 3עקן זײַנען קאָנגרוענט (גלייך), אויב זיי שטימען איין אין בײדע קאטעטעס (150, 92).

ב) גלײַכלעגדיגע 3עקן זײַנען קאָנגרוענט, אויב זיי שטימען איין אין א לענד און דעם דאַכווינקל. — אַט אַזאַ (161) פאַל פון קאָנגרוענץ וועלן מיר קורץ באַצייכענען אַזוי: ז-וו-ז (2 זייטן און אַ ווינקל צווישן).

162. לערזאַץ: שטימען איין צוויי דרײַעקן אין צוויי זײַערע ווינקלען און אין דער זייט, וואָס ליגט צווישן זיי, דאַן זײַנען די דרײַעקן קאָנגרוענט. (דעקיג און גלייך) (פיג. 32) (באַצייכענונג וו—ז—וו).

פּראָוויסב.: אין די געגעבענע 3עקן ABC און A′B′C′ איז: 1) A=A′ 2) B=B′, 3) AB=A′B′. פעסטשטעל.: ABC≅A′B′C′;

באַווייז: מיר לייגן צונויף איין פּאָר אײַנשטימיגע זייטן (AB מיט A′B′), ווי אין (161). C און C′ זײַנען סימעטריש, ד. ה. זיי וועלן זיך דעקן בײַם אומדרייען אַרום דער אַקס (AB אָדער A′B′), ווײַל (112-ב, 84) און במילא וועלן זיך דעקן אלע איבעריגע עלעמענטן (74, 83).

שלוסאַצן: א) שטימען איין צוויי דרײַעקן אין איין זײַט און אין די צוויי ווינקלען, וואָס ליגן בײַ איר און אַנטקעגן איר, דאַן זײַנען די דרײַעקן קאָנגרוענט (דעקיג ד. ה. גלײַך), ווײַל (149-ד) (באַצייכענונג: ז-וו-וו).

רעכטווינקלדיגע דרײַעקן זײַנען קאָנגרוענט, אויב זיי שטימען איין אין (92).

ב) אַ קאַטעטע מיט אַ בײַליגנדיגן אָדער אַנטקעגנליגנדיגן שפּיציגן ווינקל (149-ד). (וו-ז-וו אָדער ז-וו-וו)

ג) דער היפּאָטענוזע מיט אַ שפּיציגן ווינקל (וו-ז-וו)

גלײַכלעגדיגע דרײַעקן **זײַנען קאָנגרוענט**, אויב זיי שטימען אײַן אין

ד) דער גרונדזייט מיט א גרונדווינקל (וו-ז-וו)

ה) א לענד מיט א גרונדווינקל (ז-וו-וו)

ו) דער גרונדזײַט מיטן דאַבווינקל (וו־ז־וו) (ד־153)

163. לערזאץ: שטימען אין צווײַ דרײַעקן אין ווײַערע דרײַ זײַטן, דאן זײַנען זײַ קאָנגרועַנט (רעקיג און גלײַך) פיג. 32 (באַצייכענונג: ז־ז־ז).

פאראויסב.: אין די געגעבענע 3עקן ABC און $A'B'C'$ איז 1) $AB=A'B'$ 2) $BC=B'C'$ און 3) $AC=A'C'$. פֿעסטשט.: $A'B'C' \cong BC'$;

הילפשטרעקע: CC';

באווײַז: די 3עקן ACC' און BCC' זײַנען גלײַכלענדיגע. AB איז די מיטנזײַלרעכטע פון זייער שותּפותדיגער גרונדזײַט CC' (ווײַל פאַראויסב. 2 און 3 (ג־117, 69) און דעריבער איז ווינקל CBA גלײַך $C'BA$ (ג־153) און מיר האָבן אויף אַזאַ אופן דעם פאל (ז־וו־ז 160), וועלכן מיר האָבן שוין באַוויזן.

שלוסזאצן: א) גלײַכלענדיגע דרייעקן זײַנען קאָנגרועַנט, אויב זײַ שטימען אײַן אין אַ לענד מיט דער גרונדזײַט.

ב) גלײַכזײַטיגע דרײַעקן **זײַנען קאָנגרועַנט**, אויב זײַ שטימען אײַן **אין אַ זייט.**

164. לערזאץ. שטימען אײַן צווײַ דרײַעקן אין צווײַ ווײַערע זײַטן און אין דעם ווינקל, וואָס ליגט אַנטקעגן דער גרעסערער פון די דאָזיגע זייטן, דאן זײַנען די דרייעקן קאָנגרועַנט (רעקיג און גלײַך) (פיג. 32) (באַצײַכענונג: ז־ז־וו).

פֿאראויסב.: אין די געגעבענע 3עקן ABC און $A'B'C'$ איז 1) $AB=A'B'$ 2) $AC=A'C'$ און 3) ווינקל $C=C'$; פֿעסטשט.: $ABC \cong A'B'C'$;

באַווייז: מיר לייגן צונויף די 3עקן מיט די גרעסערע פֿון די איינשטימיגע זייטן (ווי אין 160) אזוי, אַז די אײַנשטימיגע ווינקלען זאָלן ליגן אַנטקעגן (פיג. 32) די פונקטן C און C' פאַרבינדן מיר דורך אַ גראָדע שטרעקע. דער 3עק ACC' איז גלייכלענדיג; (פאָראויסב. 2) דעריבער זיינען די ווינקלען ACC' און $AC'C$ גלייך (153); לויט (51) שליסן מיר, אַז די ווינקלען BCC' און $BC'C$ זיינען אויך גלײַך און דער 3עק BCC' איז אויך אַ גלייכלענדיגער (155) ד.ה. $BC=BC'$ און מיר האָבן אויף אַזאַ אופן דעם פאַל (ז=ז=ז), וועלכן מיר האָבן שוין באוויזן. (163)

שלוסזאַץ: רעכטווינקלדיגע 3עקן זיינען קאָנגרועַנט, אויב זײַ שטימען אײַן אין דער היפּאָטענוזע מיט אַ קאַטעטע. (92, 156=א)

באמערקונג: מיר קענען באַווייזן אלע אויבנדערמאָנטע פאַלן פון קאָנגרועניץ אויך דורך צענטראַלסימעטריע, צונויפלייגנדיג די דרייעקן מיט די דאָזיגע שפּיצן זײַערע, פון וועלכע עס גייען אַרויס איינשטימיגע זייטן אַזוי, אַז

די איינשטימיגע זייטן זאָלן בילדן די אינאַרטיגע זייטן פון די דאָזיגע ווינקלען. נאָך דער צונויפלייגונג דאַרפן מיר זיי דרייען אַרום די געדעקטע פונקטן ווי אַרום אַ צענטער (86).

.165 באַטראַכטנדיג אַלע פיר אויסגערעכנטע פאַלן פון קאָנגרוענץ פון 3עקן—ז=וו=ז, וו=ז=וו, ז=ז=ז און ז=ז=וו, קענען מיר זיך איבערצייגן, אַז 3עקן זיינען קאָנגרוענט, ווען זיי שטימען איין אין דריי זייערע עלעמענטן (147, 158), צווישן וועלכע עס מוז זיין מינדעסטנס איין זייט. אַנדעריש געזאָגט, די דריי עלעמענטן באַשטימען פאָראויס, צו די געגעבענע 3עקן זיינען קאָנגרוענט אָדער ניט, ד. ה.:

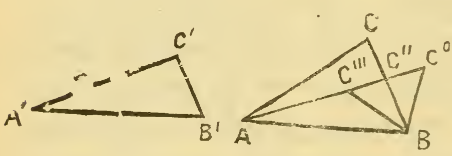
א) אַ דרייעק ווערט פולקום באַשטימט דורך דריי זיינע עלעמענטן, צווישן וועלכע עס מוז זיין מינדעסטנס איין ליניאַלער עלעמענט (אַ וועלכע עס איז שטרעקע). ווען וועלכער עס איז עלעמענט פון 3עק איז שוין פאָראויס באַקאַנט, ווי למשל דער רעכטער ווינקל אין אַ רעכטווינקל. 3עק, אָדער דער צווייטער לענד פון אַ גלייכלענדיגן 3עק, ווען דער ערשטער איז געגעבן, דאַן קען זיין גענוג צוויי עלעמענטן, ווי מיר זעהען עס טאַקע אין דער קאָנגרוענץ פון רעכטווינקלדיגע און גלייכלענדיגע 3עקן. ביי גלייכזייטיגע 3עקן איז גענוג איין עלעמענט (די זייט!), ווייל אַלע זייטן און ווינקלען זיינען גלייך צווישן זיך. ווייטער, איז אויך קלאָר אַז

ב) אין קאָנגרוענטע דרייעקן דעקן זיך ניט נאָר די זייטן און ווינקלען, נאָר אויך אַלע איבעריגע עלעמענטן זייערע: די ביסעקטריסעס, מעדיאַנעס, הויכליניעס, און מיטלסטע שטרעקעס, (158) ווייל אָדער עס פאַלן צוזאַמען די פונקטן, וועלכע באַשטימען די דאָזיגע עלעמענטן (ביי מעדיאַנעס און מיטלסטע שטרעקעס), אָדער מיר וואָלטן געקומען צו אַ סתירה מיט עטלאַכע שוין באַוויזענע זאַצן (ביי הויכליניעס-115 און90, ביי ביסעקטריסעס-46). ווען די דעקונג וואָלט ניט פאָרגעקומען, אַט די דאָזיגע שטרעקעס (ביסעקטר. מעדיאַנ. מיטלסטע־ליניעס און הויכלינ.) קענען אויך פאָראויסבאַשטימען די קאָנגרוענץ פון דרייעקן און פאַררעכנט חערן דערביי פאַר אַן עלעמענט. מ׳קען למשל לייכט באַווייזן, אַז 3עקן זיינען קאָנגרוענט ווען זיי שטימען איין אין דער גרונדזייט, אין אַ גרונדווינקל, און דער הויכליניע, וואָס איז אַראָפּגעלאָזן אויף דער דאָזיגער גרונדזייט, אָדער נעמען אנדערע וועלכע עס איז דריי עלעמענטן. עס איז לייכט צו פאַרשטיין פאַרוואָס דאָס איז אַזוי: די דאָזיגע שטרעקעס שפּאַלטן אַ געגעבענעם 3עק אין קלענערע 3עקן, פאַר וועלכע זיי זיינען די עלעמענטן. די הויכליניע, למשל, וואָס איז אַראָפּגעלאָזן אויף דער גרונדזייט פון אַ 3עק, שפּאַלט אים אין 2

(רעכטווינקלדיגע) 3עקן (מאך א צייכענונג!) דאסזעלבע א מעדיאנע, זדער בי־סעקטריסע. נאך קענען מיר פעסטשטעלן, באטראכטנדיג צוויי שוין **געדעקטע** קאנגרוענטע 3עקן, אז

ג) **אין קאנגרוענטע דרייעקן ליגן גלייכע** (איינשטימיגע) **זייטן אנטקעגן גלייכע** (איינשטימיגע) **ווינקלען און** פארקערט: **גלייכע** (איינשטימיגע) **ווינקלען ליגן אנטקעגן גלייכע** (איינשטימיגע) **זייטן.** זיינען אונז די קאנגרוענטע 3עקן געגעבן באזונדער, (ניט אין געדעקטן צו־שטאנד) דאן קען עס באוויזן ווערן דורך ארויפלייגן, ווי מיר מאכן עס ביים באווייזן די קאנגרוענץ אליין. נאך בעסער וועלן אונז פארהעלפן דערביי צוויי זאצן, וועלכע באהאנדלען דעם פאל, ווען צוויי דרייעקן דעקן זיך **ניט**, זיי־נען אומגלייך.

166. א) **לערזאץ: שטימען איין צוויי דרייעקן אין צוויי זייערע זייטן, צווישן וועלכע עס ליגן אומגלייכע ווינקלען, דאן זיינען זייערע דריטע זייטן אויך אומגלייך אזוי, אז אנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל ליגט די גרעסערע זייט** (פארגלייך 156) (פיג. 33) פאראויסב.: אין די געגעבענע דרייעקן ABC און A'B'C' איז 1) $AB = A'B'$ 2) $AC = A'C'$ 3) $A > A'$ פעסטשט.: $CB > C'B'$; באווייז: מיר **לייגן ארויף** דעם 3עק A'B'C' אויפן 3עק ABC, אזוי, אז די גלייכע זייטן AB און A'B' זאלן זיך דעקן; אזוי ווי $A > A'$ ווערט A'C' ניט פארנעמען די לאגע AC; פונקט C' קען פארנעמען איינע פון די



פיג. 33.

3 לאגעס: C^0, C'' אדער C'''. פארנעמט ער די לאגע C'', דאן איז קלאר אן באווייזן, אז $CB > C'B'$; פארנעמט C' די לאגע C^0. דאן האבן מיר: 1) $AC''+C''C > AC$ און 2) $C''B+C''C^0 > C^0B$, פון (56) שליסן מיר: 3) $AC''+C''C+C''B+C''C^0 > C^0B+AC$ אדער (52) 4) $AC^0+CB > C^0B+AC$; אבער AC^0 איז דאך די זעלבע $A'C'$ נאר ארויפ־געלייגט אויפן ווינקל ABC און וויל (56) און פאראויסב. 2) איז 5) $CB > C^0B$ אדער $CB > C'B'$; ווערט C' פארנעמען די לאגע C''' דאן האבן מיר: 1) $AC+CB > AC'''+C'''B$ (152) און וויל AC''' איז AC און $C'''B$ איז $C'B'$ און נאך $AC=A'C'$ שליסן מיר: $AC+CB > A'C'+C'B'$ אדער

$CB > C'B'$

ב) (פֿאַרקערט פֿון א) לערזאַץ. שטימען איין צוויי דרייעקן אין צוויי זייערע זייטן און זיינען די דריטע זייטן אומגלייך, דאַן זיינען די ווינקלען אנטקעגן די אומגלייכע זייטן אויך אומגלייך אַזוי, אַז אנטקעגן דער גרעסערער זייט ליגט דער גרעסערער ווינקל. (פיג 33) (פֿאַרגלייך 154)

פֿאַראויסב.: אין די געגעבענע 3עקן ABC און $A'B'C'$ איז 1) $AB = A'B'$ 2) $AC = A'C'$ און 3) $CB > C'B'$; פֿעסטשטעל: $A > A'$;

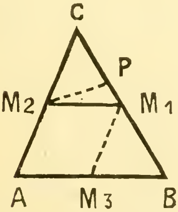
באַווייז: (דורכן אויסשליסן) A קען ניט זיין גלייך A', ווייל דאַמאָלסט וואָלטן די זייטן CB און $C'B'$ אויך געמוזט זיין גלייך (161) A קען ניט זיין קלע־נער פֿון A', ווייל דאַמאָלסט וואָלט לויט (א) BC געווען קלענער פֿון $C'B'$,ביידע פֿאַלן וואָלטן סותר געווען אונזער פֿאַראויסזאַגונג און מוזן דעריבער אָפּגעוואָרפֿן ווערן.

מיט דער הילף פֿון די ערשט באַוויזענע צוויי זאַצן, קען לייכט באַוויזן ווערן (דורכן היפוך!) אַז אין צוויי קאָנגרוענטע 3עקן, וועלכע זיינען ניט געדעקט, ליגן גלייכע זייטן (און ליניאַלע עלעמענטן בכלל) אנטקעגן גלייכע ווינקלען און פֿאַרקערט.

167. די פֿאָלגנדע זאַצן מאַכן קלאָר די איינגנשאַפֿטן פֿון די מיטלסטע שטרעקעס פֿון א 3עק.

א) לערזאַץ: א שטרעקע, וועלכע ציהט זיך דורך אַ מיטנ־פּונקט פֿון איין זייט פֿון א דרייעק פּאַראַלעל צו א צווייטער זייט, שניידט די דריטע זייט אויך אין איר מיטנפּונקט און באַטרעפֿט א העלפֿט פֿון דער דאָזיגער צווייטער (פיג. 34)

פֿאַראויסב. 1) אין נעגעבענעם 3עק ABC איז M_2 דער מיטנפּונקט פֿון AC ד. ה. $AM_2 = M_2C$ און 2) $M_2M_1 \parallel AB$;



פיג. 34

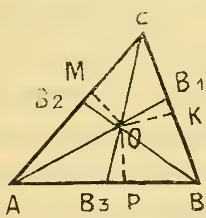
פֿעסטשטט.: 1) M_1 איז דער מיטנפּונקט פֿון BC, ד. ה. $M_1C = BM_1$ און 2) $M_2M_1 = (AB:2)$;

הילפֿליניע: $M_1M_3 \parallel AC$; באַווייז די 3עקן M_2CM_1 און M_3M_1B זיינען קאָנגרוענט (וו=ז=וו) $CM_2 = M_1M_3 = AM_2$ (145) די ווינקלען M_2CM_1 און M_3M_1B זיינען גלייך (III־139) און דעריבער (47) אויך גלייך צווישן זיך; פֿון דער קאָנגרוענץ פֿון די 3עקן שליסן מיר (ג־165): $CM_1 = M_1B$ ד. ה. M_1 איז דער מיטנפּונקט

פון CB, און $M_2M_1=M_3B$; ווייל אָבער $M_2M_1=M_3A$ (145) דעריבער איז :2 $M_2M_1=(AM_3+M_3B)$ אָדער — $M_2M_1=(AB:2)$.

ב) (פאַרקערט פון א): **אַ מיטלסטע שטרעקע פון אַ דרייעק איז פּאַראַלעל צו דער אַנטקעגנדיגער זייט און באַטרעפט אַ העלפט פון איר.** פאַראויסב.: M_1 און M_2 זיינען די מיטנ-פונקטן פון CB און AC; פעסטשט.: 1) $AB \parallel M_2M_1$, $M_2M_1=(AB:2)$; באַווייז: וואָלט M_2M_1 ניט געווען פּאַראַלעל צו AB, וואָלטן מיר דורכן פונקט M_2 געקענט ציהען אַ וועלכע עס איז M_2P פּאַראַלעל צו AB און דאמאָלסט וואָלט אויסגעקומען לויט (**א**), אַז P איז דער מיטנפונקט פון CB און עס וואָלט געווען $CP=(CB:2)$ אָבער $CM_1=(CB:2)$ און מיר וואָלטן געמוזט שליסן אַז $CP=CM_1$. אבסורד! (46); בלייבט הייסט עס, אַז M_2M_1 איז פּאַראַלעל צו AB און במילא (לויט **א**) גלייך (AB:2).

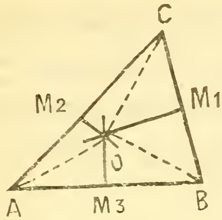
168. איצט וועלן מיר באַטראַכטן פיר מערקווירדיגע פונקטן פון א 3עק. **א) ערשטער פונקט. לערזאַץ: די ביסעקטריסעס פון די דריי ווינקלען פון אַ דרייעק שניידן זיך אַלע אין איין פונקט,** וועלכער איז גלייך דערווייטערט פון די זייטן פון 3עק (116-באַשטימ.) (פיג. 35.)



פיג. 35.

פאַראויסב.: AB_1, BB_2 — די ביסעקטריסעס פון די ווינקלען A און B, זייער שניט-פונקט O; פעסטשט.: די גראָדע CB_3 איז די ביסעקטריסע פון C; הילפליניעס: OK, OM און OP — ווייל רעכטע צו די זייטן פון 3עק. באַווייז: די ביסעקטריסעס פון די ערשטע ביידע ווינקלען מוזן זיך שניידן, (141) און דעריבער איז OK=OP און OM=OP (119) הייסט עס, OM=OK (47) און דעריבער איז OC די ביסעקטריסע פון C (119-ג, 69). **באַמערקונג:** דערזעלבער זאַץ וועט גילטן בנוגע די ביסעקטריסעס פון איין אינעווייניגסטן ווינקל און די איבעריגע צוויי דרויסנ-ווינקלען פון דרייעק. (מאַך אַ צייכענונג!)

ב) צווייטער פונקט. לערזאַץ: די מיטנזיילרעכטע צו די דריי זייטן פון אַ דרייעק שניידן זיך אַלע אין איין פונקט, וועלכער איז גלייך דערווייטערט פון די שפּיצן פון דאָזיגן דרייעק (פיג. 36). פאַראויסב.: M_1O און M_2O די מיטנזיילרעכטע פון די זייטן CB און AC, זייער O,



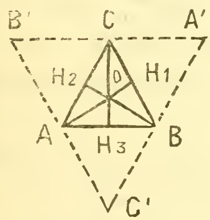
פיג. 36.

שניטפונקט; OM_3 — אַ זיילרעכטע פֿון O אויף דער זייט AB; פֿעסטשט.: $AM_3=M_3B$ און $OA=OB=OC$;

באוויז: $OB=OC$ און $OA=OC$ (117-א) הײַסט עס $OB=OA$ (47) און דעריבער ליגט פונקט O אויף דער מיטנזײַלרעכטער צו AB, ווײַל אָבער (115 און 153-ג) איז OM_3 די מיטנזײלרעכטע פון AB און $AM_3=M_3B$.

באמערקונג: דערזעלבער זאַץ ווערט גילטן, ווען די מיטנזײַלרעכטע צו די זײַטן פון 3עק וועלן זיך שנײַדן אויסער דעם 3עק, ווי דאָס קען פֿאָר-קומען אין אַ טעמפּווינקלדיגן 3עק.

ג) דריטער פונקט. לערזאַץ: די הויכלינִיעס פון אַ דרײַעק שנײַדן זיך אַלע אין איין פונקט.



פיג. 37.

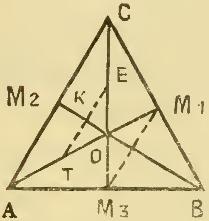
(פיג. 37) פֿאָראויסב.: $AH_1 \perp CB$, $BH_2 \perp AC$ זייער שניטפונקט O; פֿעסט.: די גראָדע BOH_3 איז $\perp$ צו AB. הילפֿליניעס: דורך די פונקטן A, B און C ציהען מיר פּאַראַלעלע צו די אַנט-קעגנליגנדיגע זײַטן. די דאָזיגע פּאַראַלעלע בילדן דעם 3עק $A'B'C'$; באַווײַז: מיר וועלן באַווײַזן אַז AH_1, BH_2 און CH_3, די הויכליניעס פון 3עק ABC, זײַנען אײנצייטיג די מיטנזײַלרעכטע צו די דרײַ זײַטן פון 3עק $A'B'C'$ און אַלס אַזוינע מוזן זיי זיך שנײַדן אין איין פונקט (לויט ב). אין דער אמתן: BA' און BC' זיינען אײנציגווייז גלײַך AC (145), ד. ה. B איז דער מיטנפונקט פון $A'C'$; אויב $BH_2 \perp AC$ איז אויך $BH_2 \perp A'C'$ (139-א), דאָסזעלבע: AC' און AB' זײַנען גלײַך צווישן זיך, ווײַל זיי זײַנען אײנציג-ווייז גלײַך צו CB (145) א. א. וו. (זעה ב).

באַמערקונג: דערזעלבער זאַץ ווערט גילטן, ווען די הויכליניעס פון 3עק וועלן זיך שנײַדן אויסער דעם 3עק, ווי דאָס קען פֿאָרקומען אין אַ טעמפּ-ווינקלדיגן 3עק.

שלוסזאַץ: די מיטנזײַלרעכטע פון די קאטעטעס פֿון אַ רעכטווינקלדיגן דרײַעק שנײַדן זיך בײדע אין מיטנפונקט פון דער היפּאָטענוזע. (129-ב, 167-ב, 71).

ד) פערטער פונקט. לערזאַץ: די מעדיאַנעס פון אַ דרײַ-

עָה שנײַדן זיך אַלעָ אין אײן פּונקט, וועלכער איז דעָרווײ־טערט פון זײַערע פוסספונקטן אויף אַ דריטל פון זײַער לײַנג.
(פיג. 38).



פיג. 38.

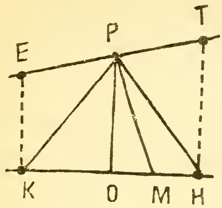
פּאָראויסב.: AM_1 און CM_3—די מעָדיאַנעָס פון די זײַטן AB און BC פון דרײַעָק, ד. ה. $AM_3=M_3B$ און $CM_1=M_1B$, זײַער—שניטפונקט O; פעָסטט.: 1) די גראָדע BOM_2 איז די מעָדיאַנע פון AC ד. ה. $AM_2=M_2C$ און 2) $OM_1=(AM:3)$, $OM_2=(BM_3:3)$ און $OM_3=(CM_3:3)$; ה. לפּ־ליניעָס: M_1M_3, וועלכעָ שנײַדט BM_2 אין פונקט P, און ET די מיטלסטע שטרעָקע פון דרײַעָק COA וועלכעָ שנײַדט BM_2 אין פּונקט K. באַווײַז: M_1M_3 און ET זײַנען אײנציגווײַז פּאַראַלעָל צו AC און גלײַך דעָר העָלפט אירעָר (167־ב), דעָרפון שליסן מיר: 1) $ET=M_1M_3$ (47) און $ET \parallel M_1M_3$ (138־ב) 2) ווינקל ETM_1 איז גלײַך TM_1M_3 און ווינקל TEM_3 איז גלײַך EM_3M_1 (139־I); הײסט עָס, אז די דרײַעָקן OTE און OM_3M_1 זײַנען קאָנגרועָנט (ו־ז־ו) און $OT=OM_1$, אָבער $OT=TA$, דעָריבעָר איז $AT=TO=OM$ ד. ה. $OM_1=(AM:3)$; דאָסזעָלבעָ: $OM_3=OE$ און $OE=EC$, הײסט עָס (165־ג) $OM_3=OE=EC$ און $OM_3=(CM:3)$; ווײַטעָר: די דרײַעָקן OEK און OPM_3 זײַנען קאָנגרועָנט (ו־ז־ו) ווײַל עָס קומעָן נאָך צו די גלײַכע שעָרווינקלען POM_3 און KOE; הײסט עָס (165־ג) $EK=PM_3$: אָבער $EK=(CM_2:2)$ און $M_3P=(AM_2:2)$ און דעָרפון שליסן מיר, אַז $(AM_2:2)=(CM_2:2)$ אָדעָר $CM_2=AM_2$ ד. ה. BOM_2 איז די מעָדיאַנע פון AC!

III.

זײַלרעָכטע און געָנײַגטע. פּאַראַלעָלע שטראַלן.

169. פון אַ געָגעָבעָנעָם פונקט (P), (פיג. 39) וואָס ליגט אויסעָר אַ געָגעָבעָנעָר גראָדער (KH), קעָן מעָן אַראָפּלאָזן אויף דעָר דאָזיגעָר גראָדעָר אַ זײַל־רעָכטע (PO,115) און אַ סך געָנײַגטע (PK, PM, PH).

באַשטימונג: א) דעָר פוספונקט(O)פון אַ זײַלרעָכטעָר (PO),וואָס איז אַראָפּ־



פיג. 39.

געלאזן פון א געגעבענעם פונקט (P) אויף א געגעבענער גראדער (KH), הייסט די **פראיעקציע** פון דעם דאזיגן פונקט אויף דער געגעבענער גראדער.

ב) ליגט דער פונקט (M) אויף דער גראדער (KH) גופא, דאן זאגן מיר, אז דער פונקט **פאלט צוזאמען** מיט זיין פראיעקציע.

ג) די שטרעקע (KH) צווישן די פראיעקציעס (H און K) פון צוויי פונקטן (T און E) אויף א געגעבענער גראדער (KH), הייסט די פראיעקציע פון דער שטרעקע (ET) צווישן די דאזיגע פונקטן (E און T) אויף דער געגעבענער גראדער.

(די שטרעקע KH איז די פראיעקציע פון דער שטרעקע ET אויף דער גראדער KH)

ד) שטייט די שטרעקע (PO) צווישן צוויי פונקטן (P און O) ווילרעכט צו א געגעבענער גראדער (KH), דאן וועט איר פוספונקט (O) זיין איר פראיעקציע אויף דער געגעבענער גראדער (KH), ווייל ביידע פראיעקציעס פון די פונקטן (P און O) גיסן זיך צונויף אין איין פינקט O (ב).

פון דעם, וואס מיר האבן געזאגט, איז קלאר, אז די פראיעקציעס פון PK, PM און PH אויף דער גראדער KH וועלן זיין די שטרעקעס OK, OM און OH א. ד. גל.

170. **איצט** וועלן מיר באטראכטן די שייכות צווישן די לייגנגען פון צוויי גענייגטע צו איין און דער זעלבער גראדער, וואס גייען ארויס פון איין פונקט, און זייערע פראיעקציעס אויף דער דאזיגער גראדער (פיג. 39)

לערזאץ: לאזן מיר אראפ פון איין פונקט צוויי גענייגטע (PK מיט PH, אדער PK מיט PM) און א ווילרעכטע (PO) אויף איין און דערזעלבער גראדער (KH), און

א) ווינען די פראיעקציעס פון ביידע גענייגטע גלייך צווישן זיך, דאן זיינען די גענייגטע אליין אויך גלייך צווישן זיך, ווייל די ווילרעכטע (PO) איז אפנצייטיג אויך די מיטנווילרעכטע פון דער שטרעקע צווישן די פוספונקטן פון די גענייגטע, ד. ה. עס מוז זיין

$$PK = PH \quad (117)$$

ב) (נעג. צו **א**) **יענע פון ביידע גענייגטע איז קלענער, וואס איר פראיעקציע איז קירצער.**

פאראויסג.: $OK > OM$; פעסטשט. $PK > PM$; באוויז: מיר שטעכן אפ א שטרעקע OH, וואס זאל זיין גלייך OK פון יענער זייט פון דער ווילרעכ-

טער, װאו די קלענערע PM. לויט (**א**) $PH=PK$ דער װינקל PHO איז א שפּיציגער ($P\hat{O}H=d$); װינקל PMH = א טעמפּער (דרויסנװינקל פון 3עק POM) און פון 3עק PMH שליסן מיר, אז $PM > PH$ [156] הייסט עס, איז $PM > PK$

ג) (פּארק. צו **ב**) **זיינען די גענײַגטע גלייך צווישן זיך, דאן זיי־נען זייערע פּראיעקצעס אויך גלייך צווישן זיך** ווײַל דער 3עק PKH איז א גלײַכלענדיגער און PO א זײַלרעכטע צו HK (153=ג, 115)

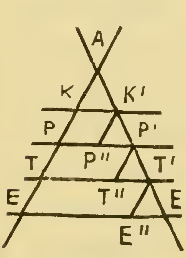
ד) (פּארק. צו **ב**): **יענע פּראָיעקציע איז לייַנגער, וואס איר גענייגטע איז לייַנגער.**

פאראויסב.: $PM > PK$; פעסטשט.: $OM > OK$; באווייז: עס קען ניט זײַן $OM=OK$, אדער $OM < OK$ ווייל דאן וואלט געמוזט זײַן $PM=PK$ (**א**) דער $PM < PK$ (**ב**) בײדע פאלן זיינען סותר אונזער פאראויסב.; בלײַבט $OM > OK$, ווייל נאך א שײַכות (א פּערטע) צווישן OK און OM קענען מיר זיך ניט פארשטעלן.

אין (115=**א**-**ב**) האבן מיר שוין באוויזן, אז די קירצסטע שטרעקע צווישן א געגעבענעם פונקט און א געגעבענער גראָדער וועט זײַן די זייל־רעכטע פון פונקט אויף דער דאזיגער גראדער און פּארקערט.

171. **א**יצט וועלן מיר באטראכטן א פאל, ווען א רײַע פאראלעלע שטראלן ווערן געשניטן פון צוויי (אָדער מער) גראָדע

לערזאַץ: ווערן צוויי (אדער מער) **גראָדע געשניטן פון אַ רייע פּאראַ־לעלע שטראַלן אַזוי, אז איינע פון די דאָזיגע גראָדע ווערט געהאקט אין גלייבע שטרעכעס, דאַן ווערט די צווייטע** (אדער אלע איבעריגע) **גע־האקט אויך אויף גלײַבע שטרעכעס**



פיג. 40

פאראויסב.: די רײַע פאראלעלע שטראלן (KK', PP', TT' און EE') האקט אויס פון דער גראדער AE גלײַך לאנגע שטרעקעס $KP=PT=TE$; פעסטשט.: $A'E'$ ווערט אויך געהאקט אויף גלייכע שטרעקעס: $K'P'=P'T'=T'E'$ הילפליניעס $K'P''$, $P'T''$ און $T'E''$ איינציגווײַז פאראלעלע צו AE; באווײַז: $K'P''=KP$, $P'T''=PT$ און $T'E''=TE$ (145) און ווייל $KP=PT=TE$ איז אויך $K'P''=P'T''=T'E''$ (47); ווײַטער די דרײַעקן $K'P''P'$, $P'T''T'$ און $T'E''E'$ זײַנען אלע קאנגרועט (רעקיג) (וו=ז=וו), ווײַל די ווינקלען $P''K'P'$ און $T''P'T'$, $E''T'E'$ זײַנען גלײַך צווישן זיך (139=ш), דאסזעלבע די ווינקלען

'K'P''P, 'P'T''T און 'T'E''E און דערפון שליסן מיר, אַז די ווינקלען 'P''P'א, 'T''T'P און 'E''E'T זיַינען אויך גליַיך (149=ד) פון דער קאָנגרועניץ פֿון די דרייעקן שליסן מיר (165=ג), אז K'P'==P'T'==T'E'.

IV.

געאמעטרישע אויפשטעלונגען

172. אויספירן אַ **געאָמעטרישע אויפשטעלונג** דאָס איז אַן אויפגאַבע אָנצוצייַכענען אַ געאָמעטרישע פיגור (18), וועלכע זאָל פאַרמאָגן באַשטימטע פֿאָראויסגעגעבענע אייגנשאַפטן. אַלע איינפאַכע געאָמעטרישע פיגורן, וועלכע מ'קען אָנצייַכענען אויף אַ פּלאַטע, שטעלן זיך צונויף אָדער פֿון שטרעקעס, ד. ה. טיילן פון גראָדע ליניעס, אַדער פֿון אומקרייַזבויגנס, ד.ה. טייַלן פון אַן אומקרייז, אָדער פֿון ביידע פֿיגורן צוזאַמען. די איינפאַכסטע אויפשטעלונגען, ד. ה. דאָס אָנצייַכענען פֿון אַן אומקרייַז מיטן צירקל, און דאָס ציהען אַ גראָדע מיט אַ ווירע, ווערן אָנגענומען אַלס פאָראויס שוין באַקאַנטע. פון די דאָזיגע איינפאַכסטע פיגורן קענען מיר שוין אויפשטעלן אַלע איבעריגע.

די אייגנשאַפטן, וועלכע די געזוכטע פיגורן דאַרפן פאַרמאָגן, באַשטייען אָדער אין דער גרויס פון זייערע עלעמענטן (זייטן, ווינקלען א. ד. ג.), אָדער אין דער געגנזייַטיגער לאַגע פון די עלעמענטן. דערבייַ ווערן אונז געגעבן ניט אַלע עלעמענטן פון די פיגורן, נאָר עטלאַכע פון זיי, וועלכע זייַנען גענוג כדי אויסצופירן די אויפשטעלונג.

די לייזונג פֿון דער אויפשטעלונג באַשטייט אין:

א) דעם **אַנאַליז**, ד. ה. אין דעם אויפזוכן נייַע אייגנשאַפטן פון דער געזוכטער פֿיגור, אויסער יענע, וועלכע זיינען אונז פאָראויס געגעבן. ביים אַנאַליזירן אַ פיגור פאַרהעלפֿן אונז אַלע אקסיאָמעס און לערזאַצן (43), וועלכע זייַנען אונז באַקאַנט און וועלכע באַהאַנדלען די אייגנשאַפטן פון פיגורן בכלל. דער אַנאַליז איז דער וויכטיגסטער טייל פֿון דער לייזונג. כדי צו אַנאַליזירן די געזוכטע פיגור, שטעלן מיר זיך פאָר, אַז זי איז שוין געלייזט, ד. ה. מיר צייכענען אָן אַ פיגור, וועלכע זאָל כלומרשט זיין די געזוכטע און מיר באַטראַכטן נייַע אייגנשאַפטן אירע; דערבייַ קומט אונז אָפטמאָל אויס צו צייַכענען אַלערלייַ הילפליניעס: זייַלרעכטע, פּאַראַלעלע, מעדיאַנעס, ביסעקטריסעס א. ד. גל,

ב) דער **אויפשטעלונג** אַליין, ד. ה. אָנצייַכענען די פיגור מיטן צירקל

און ווירע לויט אירע געפונענע נײַע אײַגנשאַפטן,

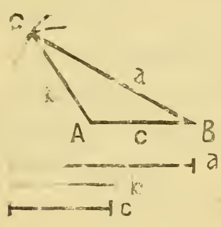
ג) דעם **באַווײַז**, ד. ה. ברײַנגען די ראיה אַז די אָנגעצייכנטע פיגור איז אין דער אמתן אַזאַ, ווי מיר האָבן געפאָדערט, ד. ה. אַז זי פאַרמאָגט די אײַגנשאַפטן, וואָס מיר פאַרלאַנגען פון איר.

ד) דער **אויספאָרשונג**. בײַ דער אויספאָרשונג דאַרפן מיר אָנווײַזן: 1) די מעגלאַכקײַט פון דער אויפשטעלונג לויט די פאָראויסגעגעבענע עלעמענטן אירע; 2) די ענדערונג פון דער לייזונג, בײַ דער פאַרענדערונג פון די פאָראויסגעגעבענע עלעמענטן; 3) צו האָט די אויפגאַבע עטלאַכע לייזונגען און וויפיל. אָפטמאָל פאַלט אַרויס דער אַנאַליז צוליב דער אײַנפאַכקײַט פון דער אויפגאַבע.

173. פריהער וועלן מיר אויספירן עטלאַכע אײַנפאַכע אויפשטעלונגען, וועלכע מיר וועלן אָפט באַנוצן בײַ די ווײַטערדיגע אויפגאַבעס.

א) אויפשטעלן אַ דרײַעק פון די געגעבענע דרײַ זײַטן זיינע.

געגעבן: 3 שטרעקעס לויט זייער לייננג: a, b און c (פיג. 41 אונטן) אויפגאַבע: אויפשטעלן אַ דרײַעק, וואָס זײַנע 3 זײַטן זאָלן פאַרמאָגן די געגעבענע לענגען. אויפשטעלונג: מיר ציהען אַ וועלכע עס איז גראָדע AB, שטעכן אָפ (76-א) אויף איר אַ שטרעקע AB פון דער לייננג a (מעטער, אַרשין, ווערשאָק בכלל וויפיל מיר מיינען מיטן סימן a), אַרום דעם פונקט B ציהען מיר אַן אומקרײַזבויגן מיטן ראַדיוס גלײַך a (ד. ה. מיט דער לייננג וועלכע מיר מיינען מיט דעם סימן), דאָסזעלבע אַרום פונקט A מיטן ראַדיוס b; בײדע אומקרײַזבויגן וועלן זיך שנײַדן אין פונקט C, וועלכן מיר פאַרבינדן דורך שטרעקעס מיט די פונקטן A און B. דער 3עק ABC איז דער געזוכטער.



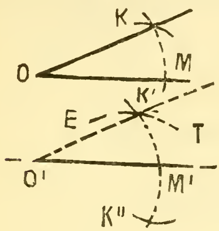
פיג. 41.

באַווײַז: די זײַטן פון 3עק ABC באַפרידיגן דער געשטעלטער פאָדערונג;

אויספאָרשונג: די אויפשטעלונג איז מעגלאך נאָר דאַן, ווען יעדע פון די געגעבענע זײַטן איז קלענער פון דער סומע פון די איבעריגע צוויי. ווען ניט, וועלן זיך די געצווינגענע אומקרײַזבויגנס ניט שנײַדן (מאַך אַ צייכענונג!) און מיר וועלן ניט באַקומען דעם דריטן שפיצפונקט. (148)

איפן זעלבן שטייגער ווערט אויסגעפירט די אויפגאַבע: **אנצייכענען א דרײַעק, וואס זאל זיין גלײַך** (קאנגרועֶנט) **צו א נעגעבענעם.** די לייננג פון יעדער זײַט פון געזוכטן דרײַעק שטעכן מיר אָפ פון דער לייננג פון די זײַטן פון געגעבענעם.

איבערטראגן א ווינקל, אדער אויפשטעלן אַ געגעבענעם

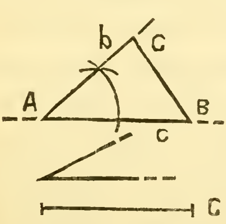


פיג. 42

ווינקל (ד) (פיג. 42) געגעבן: א ווינקל KOM; אויפגאבע: איבערטראָגן דעם ווינקל אויף דער גראדער O′M′ אזוי, אז זײַן שפּיצ־פונקט זאל אויסקומען אין פונקט O′; אדער: אויף דער גראדער O′M′ אנצײכענען א ווינקל, מיטן שפּיצפונקט אין O′, וואס זאָל זײַן גלייך דעם געגעבענעם ווינקל KOM.

אויפשטעלונג: אַרום די פונקטן O און O′ ציהען מיר מיט איין און דעמזעלבן ראַדיוס אומקרײַזבויגנס KM און K′M′. די זײַטן OK און OM פון געגעבענעם ווינקל וועלן געשניטן ווערן פון בויגן אין די פונקטן K און M. ארום פונקט M′ ציהען מיר אַן אומקרייזבויגן מיט א ראדיוס, וואָס זאָל זײַן גלײַך דער שטרעקע MK צווישן די אויבנדערמאָנטע אָנגעמערקטע פונקטן K און M; דער נייער בויגן (ET) וועט שנײַדן דעם פריהערדיגן (K′M′) אין פונקט K′; איצט פארבינדן מיר די פונקטן K′ מיט O′ דורך אַ גראָדער. דער ווינקל K′O′M′ איז דער געזוכטער. באווײַז: (הילפשטרעקעם KM און K′M′) די 3עקן KOM און K′O′M′ זײַנען גלײַכלענדיגע (OK=OM און O′K′=O′M′ ווײַל גלײַכע ראדיוסן) און שטימען איין אין זייערע לענדן און גרונדזײַטן (ז־ז־ז, ווייל MK=M′K′ גלייכע ראַדיוסן), זיי זיינען דעריבער קאנגרוענט און (165־ג); הייסט עס, אז די ווינקלען KOM און K′O′M′ זײַנען גלייך. **ב**אמערקונג: די אומקרייזבויגנס, וועלכע מיר ציהען ארום די פונקטן O′ און M וועלן זיך שניידן נאָך אין אַ פונקט K″ און דעריבער וועלן מיר אייגנטלאך באַקומען צוויי גלײַכע ווינקלען פון ביידע זײַטן פון דער גראָדער O′M′

ג) **אויפשטעלן אַ דרײַעק פון** די געגעבענע **צוויי זײַטן** און **דעם ווינקל, וואָס ליגט צווישן זיי** (ז=וו=ז) געגעבן: צוויי שטרעקעס (b, c) און ווינקל (ד) צווישן זיי. (פיג 43).



פיג. 43

אויפגאבע: אויפשטעלן א 3־עק פון די עלעמענטן

אויפשטעלונג: אויף א באליביגער גראדער AB שטעלן מיר אָפּ א שטרעקע AB, וואָס איר לײַנג זאָל זײַן c; בײַ A (אדער B) שטעלן מיר אויף דעם ווינקל ד (זעה אויפגאַבע ב) אויף דער גראָדער AC, (דער צווייטער זייט

פֿון אויפֿגעשטעלטן ווינקל), שטעלן מיר אָפּ די שטרעקע AC, וואָס איר לענג זאָל זײַן b און פֿאַרבינדן די פּונקטן C מיט B דורך דער שטרעקע CB; דער דרײַעק ABC איז דער געזוכטער. באַווײַז: די זײַטן AB און AC, ווי אויך דער ווינקל ד פֿון אויפֿגעשטעלטן 3עק ABC באַפֿרידיקן די געשטעלטע פֿאָדערונגען. **אויספֿאָרשונג:** די לענגען b און c קענען זײַן באַליביקע, דער ווינקל ד מוז זײַן ווייניקער פֿון 2d, ווען ניט וועלן די איבעריקע צוויי ווינקלען מוזן באַטרעפֿן נול (149); עס איז מעגלעך נאָר **איין** לייזונג, פֿון דער אויפֿגאַבע, ווײַל אַלע 3עקן, וועלכע וועלן באַפֿרידיקן דער אויפֿגאַבע ווינען דעקיק (ו=ז=ד).

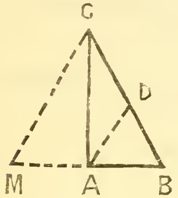
ד) **אויפֿשטעלן אַ דרײַעק פֿון די געגעבענע צוויי ווינקלען ווינע אין דער זײַט, וואָס ליגט צווישן זיי** (וו=ז=ה)

לייזונג: מיר ציִען אַ באַליביקע גראָדע, שטעלן אָפּ אויף איר די געגעבענע שטרעקע (AB למשל), אין די ענדפּונקטן (A און B) פֿון דער דאָזיקער שטרעקע שטעלן מיר אויף די געגעבענע צוויי ווינקלען (**א** און **ב** למשל), אַזוי, אַז זיי זאָלן ליגן אויף דער געגעבענער גראָדער מיט זייערע פֿאַרשיידנאַרטיקע (81) זײַטן; די איבעריקע צוויי זײַטן זייע־ע פֿאַרלענגערן מיר ביז זיי וועלן זיך שנײַדן אין וועלכן עס איז פּונקט (C למשל). דער באַקומענער 3עק ABC איז דער געזוכטער, ווײַל ער באַפֿרידיקט די געשטעלטע פֿאָדערונגען. **אויספֿאָרשונג:** די געגעבענע שטרעקעס קענען זײַן באַליביק לאַנג, אָבער די סומע **א**+**ב** מוז זײַן ווייניקער פֿון 2d, ווען ניט וועט דער דריטער ווינקל (ג) מוזן באַטרעפֿן נול (149).

ה) **אויפֿשטעלן אַ דרײַעק פֿון איין זײַט זײַנער אין צוויי ווינקלען, וואָס איינער ליגט בײַ דער דאָזיקער זײַט און דער צווייטער אַנטקעגן איר.** לייזונג: מיר געפֿינען אַפֿריִער די סומע פֿון די צוויי געגעבענע ווינקלען אויף אַזאַ אופֿן: מיר שטעלן אויף איינעם פֿון זיי (**א** למשל) (זעה דעם ווינקל HB'C פֿיג. 27, זײַטל 70); אויף דער זײַט (BH) פֿון אויפֿגעשטעלטן ווינקל שטעלן מיר אויף דעם צווייטן ווינקל (HBA למשל פֿיג. 27) אַזוי, אַז בײדע ווינקלען זאָלן האָבן אַ שותּפֿותדיקן שפּיצפּונקט (B); פֿאַרלענגערנדיק די ערשטע זײַט (B'C) פֿון ערשטן ווינקל (HBC) אין אַנטקעגנדיקער ריכטונג (BM) וועלן מיר באַקומען דעם דריטן ווינקל (ABM) פֿון דעם געזוכטן דרײַעק (ווײַל CBM איז אַ גראָדע און (96) און (149); דער נײַבאַקומענער ווינקל וועט ליגן בײַ דער נעגעבענער גראָדער פֿון אַ ר צווייטער זײַט: איצט ווערט די אויפֿשטעלונג געפֿירט ווײַטער ווי אין (ד).

ו) **אויפֿשטעלן אַ רעכטן ווינקל בײַם ענדפּונקט פֿון אַ שטרעקע, אָדער: אַוועקשטעלן אַ ווילרעכטע צו אַ גראָדער**

אין אירן אן ענדעפונקט. לייזונג: אויף דער געגעבענער שטרעקע AB שטעלן מיר אויף א גלייכזייטיגן (148־א) 3עק ABD ווי אין (א) די זייט AD, וואס ליגט אנטקעגן דעם ענדעפונקט A, פארלייג׳ גערן מיר ווייטער אויף א שטרעקע DC, וועלכע זאל זיין גלייך BD; דעם אנגעמערקטן פונקט C פארבינדן מיר מיט A; דער ווינקל CAB וועט זיין א רעכטער. באוויז: אזוי ווי דער 3עק ABD איז א גלייכזייטיגער, באטרעפט יעדער פון זיינע ווינקלען $^2/_3d$ (153־ה); דער 3עק ADC איז א גלייכלעגדיגער ($AD=DB=DC$, 47) און די ווינקלען CAD און ACD זיינען גלייך צווישן זיך און באטרעפן יעדערער א העלפט פון דרויסווינקל ADB (151) ד. ה. $^1/_3d$; דער ווינקל CAB איז גלייך $CAD+DAB$ ד. ה. $^1/_3d+^2/_3d$ אדער צוזאמען d, ד. ה. עס איז א רעכ־טער. פון דער אויפשטעלונג מאכן מיר באלד צוויי שלוסזאצן, וועלכע מיר וועלן אפט באנוצן שפעטער:



פיג. 44.

I) **אויב א שפיציגער ווינקל פון א רעכטווינקלדיגן דריי־עק באטרעפט** $^1/_3d$ (30^0), **דאן איז די אנטקעגנליגנדיגע קא־טעטע גלייך דער העלפט פון דער היפאטענוזע.** הילפליניע AD, וועלכע זאל בילדן מיט AB א ווינקל, וואס באטרעפט $^2/_3d$; באוויז: אויב $ACD=^1/_3d$ איז $CBA=^2/_3d$, ווייל $CAB=d$; הייסט עס, אז $AB=AD=DB$ (155, 149) און $AD=CD$ (155) רערפון שליסן מיר $AB=BD=^1/_2DC$; פארקערט:

II) **אויב א קאטעטע באטרעפט א העלפט פון דער היפא־טענוזע, דאן באטרעפט דער אנטקעגנדיגער ווינקל** $^1/_3d$ (30^0). באוויז פארלייגערן מיר BA אין אנטקעגנדיגער ריכטונג. אויף א שטרעקע AM וואס זאל זיין גלייך AB; $CM=CB$ (170־א); $MB=2AB=CB$ (לויטן פאראויסב). דער 3עק MBC איז א גלייכזייטיגער! $MCB=^2/_3d$ (153־ה) און $ACB=^1/_3d$ (30^0) ווייל (153־ג).

ז) **אויפשטעלן א דרייעק פון צוויי זייטן זיינע און דעם ווינקל, וואס ליגט אנטקעגן דער קלענערער פון די דאזיגע צוויי זייטן.** (ז־ז־וו פיג. 31 זייטל 76. דריי אום די פיגור אזוי, אז CE זאל זיין די גרונדזייט:

געגעבן: די שטרעקעס AC און CE און דער ווינקל E, וואס ליגט אנטקעגן

דער קלענערער AC; **אויפגאבע:** אויפשטעלן א דרייעק פון די געגעבענע
עלעמענטן. **לייזונג:** אויף אַ גראָדער CE) מערקן מיר אָן אַ פונקט E, שטעלן
אויף דעם ווינקל E און שטעכן אָפּ פון פונקט E אויף דער זייט EA פון
ווינקל די שטרעקע EA, וואָס זאָל זיין גלייך דער געגעבענער, אַרום פונקט
A ציהען מיר אַן אומקרייזבויגן מיט אַ ראַדיוס, וואָס זאָל זיין גלייך דער
צווייטער (קלענערער) געגעבענער זייט AC. אויב דער בויגן וועט שניידן די
גראָדע EC אין פונקט C, וועט דער דרייעק ECA זיין דער געזוכטער.
אויספאָרשונג: אַזוי ווי $AE \gt AC$, מוז דער ווינקל E זיין אַ שפּיציגער
(ווייל אַ טעמפּער וואָלט געמוזט ליגן אַנטקעגן דער גרעסערער AE) (154).
כדי דער אומקרייזבויגן, וואָס מיר האָבן געצויגן מיטן ראַדיוס AC, זאָל
שניידן די גראָדע EC, דאַרף AC זיין ניט קירצער פון דער זיילרעכטער,
וואָס קען אַראָפּגעלאָזן ווערן פון פונקט A אויף EC (ווייל די זיילרעכטע
איז די קירצסטע). וועט AC זיין גלייך לאַנג ווי די זיילרעכטע, דאַן איז
מעגלאַך נאָר **איין לייזונג**; וועט זי אָבער זיין לענגער פון דער זיילרעכטער,
דאַן קען מען אַראָפּלאָזן פון פונקט A צוויי געגייגטע פון איין און דערזעל־
בער לענג AC און AB (115־ג) און מיר וועלן האָבן אין דעם פאַל **צוויי
לייזונגען:** די 3עקן EAC און EAB $\sphericalangle ECA + \sphericalangle EBA = 2d$
(ווייל $ACE = ABC$ און $ABC + ABE = 2d$); וועט AC זיין קירצער
פון דער זיילרעכטער, דאַן איז **די לייזונג אוממעגלאַך**

ח) אויפשטעלן אַ דרייעק פון צוויי זייטן זיינע און דעם ווינקל, וואָס ליגט אַנטקעגן דער גרעסערער פון די דאָזיגע צוויי זייטן. (ז־ז־וו פיג 31): געגעבן די שטרעקעס EC און AC און
דער ווינקל A, וואָס ליגט אַנטקעגן דער גרעסערער EC. **אויפגאַבע:** אויפ־
שטעלן אַ 3עק פון די געגעבענע עלעמענטן. **לייזונג:** (ווי אין ז) אויף דער
גראָדער AC שטעלן מיר אויף ביים פונקט A דעם ווינקל A. שטעכן אָפּ,
ווי אין (ז), די שטרעקע AC און ציהען אַרום C אַן אומקרייזבויגן מיט אַ
ראַדיוס גלייך CE, וועלכער וועט שניידן AE אין פונקט F. דער 3עק ECA
איז דער געזוכטער.

אויספאָרשונג; CE איז יעדנפאַלס לענגער פון דער אויבנדערמאָנטער
(ז) זיילרעכטער, ווייל $AC \lt EC$ ד. ה. CE איז ניט די קירצסטע שטרעקע
צווישן פונקט C און דער גראָדער AE. נאָך אַ צווייטע לייזונג, ווי אין (ז),
איז אוממעגלאַך, ווייל אויב אפילו דער אומקרייזבויגן פון ראַדיוס CE וועט
שניידן AE אין נאָך א פונקט, וועט עס אויסקומען פון יענער זייט פון פונקט
A, אויף דער פאַרלענגערונג פון EA (170־ד) און דאַמאָלסט וועט אַנטקעגן

דער גרעסערער CE ליגט ניט דער געגעבענער ווינקל A, נאָר זיין מיטגע-שטרעקטער און די לײזונג וועט ניט טויגן (מאַך א צייכענונג! ווי פיג. 31 און לאָז נאָך אַראָפּ אַ ײלרעכטע פון C אויף EA).

ט) דורך אַ געגעבענעם פּונקט, אויסער אַ געגעבענער גראָ-דער, ציהען אַ פּאַראַלעלע צו דער דאָזיגער גראָדער (פיג. 25).

געגעבן: די גראָדע CE און דער פּונקט O אויסער איר. **אויפגאַבע:** דורך O ציהען א פּאַראַלעלע צו CE. **לײזונג:** דורכן פונקט O ציהען מיר אַ וועלכע עס איז גראָדע (שניידליניע) OX, וועלכע זאָל שניידן CE מיט אַ וועלכן עס איז ווינקל כ. אויף דער גראָדער OX בײם פונקט O שטעלן מיר אויף א ווינקל ד (זעה די אויפשטעלונג ג) וואָס זאָל זיין גלייך כ; די זײט OA פון דעם דאָזיגן ווינקל וועט זיין די געזוכטע פּאַראַלעלע (135-א). אַזאַ פּאַראַלעלע צו דער געגעבענער גראָדער דורכן געגעבענעם פונקט איז מעגלאך נאָר איינע (138-אקסיאָמע).

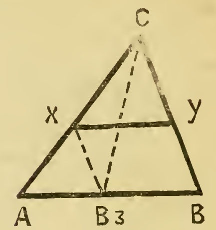
י) טײלן א געגעבענע שטרעקע אויף א באַליביגע צאָל גלײכע חלקים (פיג 40)

געגעבן איז די שטרעקע AE; אויפגאַבע: טײלן די געגעבענע שטרעקע אין 4 (למשל) גלײכע חלקים. לײזונג: דורכן פונקט A ציהען מיר א באַליביגע גראָדע AE′ מיט אַ באַליביגן ווינקל (A) צו דער געגעבענער AE. אויף דער גראָדער AE′ שטעלן מיר אָפּ פון שניטפונקט A (למשל) 4 גלייכע שטרעקעס פון באַ-ליביגער לײנג (AK′, K′P′, P′T′, T′E′), דעם ענדפונקט E′ פון דער לעצ-טער אָפּגעשטאָכענער שטרעקע פאַרבינדן מיר דורך א גראָדע (E′E) מיטן ענדפונקט E פון דער געגעבענער שטרעקע. איצט ציהען מיר דורך די אנ-געמערקטע פונקטן (K′,P′,T′) פּאַראַלעלע צו דער דאָזיגער גראָדער, (E′E) וועלכע וועלן טײלן די געגעבענע שטרעקע (AE) אין די פאַרלאַנגטע צאָל גלײכע שטרעקעס. באַווײז (171). אַלע איבעריגע אײנפאַכע אויפשטעלונגען, וועלכע קענען אונז שפּעטער פאַרקומען, האָבן מיר שוין אויסגעפירט אין (118=א=ב=ג=ד, 120).

יא) איצט וועלן מיר לייזן אַ שווערערע אויפגאַבע, כדי צו באַטראַכטן דעם גאַנצן גאַנג פון א געאָמעטרישער אויפשטעלונג. (פיג. 45).

געגעבן איז א דרײעק ABC ציהען א גראָדע פּאַראַ-לעל צו דער גרונדזייט אזוי, אז די איבערשטע שטרעקע (OX) (צווישן דאַכפּונקט און דער געזוכטער גראָדער), **וואָס די געזוכטע גראָדע האָט אָפּ פון איין לענד** (AC) (פון 3עק) **זאָל זײן גלייך דער אונטערשטער שטרעקע** (צווישן דער גרונדזייט און דער

גע׳זוכטער גראדער), וואס זי דאקט [illegible] פון צווייטן קענד CB.



פיג. 45

אנאליז. לאמיר אננעמען, אז XY איז די געזוכטע גראדע, ד. ה. $CX = YB$. ציהענ־דיג דורכן פונקט X **א הילפליניע** XB_3 פאראלעל צו CB און פארבינדנדיג דעם שניטפונקט B_3 מיטן דאכפונקט C, געפינען מיר פאלגנדיגע **נייע אייגנשאפטן** פון דער באקומענער פיגור: $XB_3 = YB$ (145) און אזוי ווי $YB = CX$ איז $XC = XB_3$ (47) און דער 3עק CX איז א גלייכלענ־דיגער ד.ה. $\sphericalangle XCB_3 = CB_3X$ ווייל אבער $XB_3 \| CB$ איז $\sphericalangle XB_3C = B_3CY$ (139) און דעריבער (27) איז $\sphericalangle XCB_3 = B_3CY$ ד. ה. CB איז די בי־סעקטריסע פון ווינקל C פון געגעבענעם דרייעק. דערפון ווערט אונז קלאר די **אויפשטעלונג:** מיר טיילן דעם ווינקל C אויף דער העלפט (1.0). דער פונקט B_3 וועט זיך שוין אליין אנמערקן אלס שניטפונקט פון דער ביסעקטריסע מיט AB; דורכן פונקט B_3 ציהען מיר א פאראלעלע צו CB (אויפג. ט) און דער פונקט X וועט זיך באקומען אלס שניטפונקט פון דער געצייגענער פאראלעלער מיט AC; דורכן פונקט X ציהען מיר א פאראלעלע XY צו AB (אויפש. ט), וועלכע וועט זיין די געזוכטע. מיר דארפן נאך ברענגען דעם **באוויין:** ווינקל ACB_3 איז גלייך B_3CY ווייל CB_3 איז די ביסעקטריסע פון C לויט דער איספארשונג, אזוי ווי B_3X איז לויט דער אויפשטעלונג פאראלעל צו CB און XY צו AB, איז $XB_3 = YB$ (145) און $\sphericalangle XCB_3 = XB_3C$, ווייטער שליסן מיר (47), אז $\sphericalangle XB_3C = B_3CY$ (און 155) $CX = B_3X$ און דערפון (47) $CX = YB$, וואס די אויפגאבע האט געפאדערט. די **איספארשונג** איז זייער אן איינפאכע: מער ווי איין ביסעקטריסע פון ווינקל C קען מען ניט ציהען, דורכן פונקט B_3 קען מען מער ווי איין פאראלעלע צו CB ניט ציהען (138) און דורכן פונקט X ניט מער ווי איין פאראלעלע צו AB: דערפון איז קלאר אז א לייזונג פון דער אויפגאבע און **ניט מער ווי איינע**, איז שטענדיג מעגלאך. **באמערקונג:** ווי עס איז צו זעהן פון דער ערשט אויסגעפירטער לייזונג שפילן די הילפליניעס זייער א וויכטיגע ראלע. אויסער איינצעלנע פאלן (געאמעטרישע ערטער), קען מען לײדער ניט אנווייזן, וועלכע הילפליניעס מ׳דארף ציהען ביי דער אדער יענער לייזונג, כדי זי זאל געלינגען. אין דעם „פאקן״ די נויטיגע הילפליניע באשטייט אפט די גאנצע קונסט פון לייזן א געאמעטרישע אויפשטעלונג.

174. **אין** ווײַטערדיקע אויפגאַבעס פון געאָמעטרישע אויסשטעלונגען פון 3עקן נעמען מיר אָן פאָלגנדיקע באַצייכענונגען און פאַרקירצונגען
די שפּיצפּונקטן ווערן באַצייכנט דורך A, B, C, אַרויסגייענדיק פון לינקס אונטן בײַ דער גרונדזײַט אויף רעכטס, ווי אויף אַלע אונזערע פיגורן פון 3עקן; די גרויס פון די ווינקלען דורך גרויסע **אָדער** קליינע אידישע אותיות (**א**, א, **ב**, ב, **ג**, ג). די לענגען פון די הויכלייניעס, וואָס גייען ארויס פון די שפּיצפּונקטן אויף די אנטקעגנדיקע זײַטן דורך h_1 אדער H_1, h_2 **אָדער** H_2, h_3 **אדער** H_3, פון די ביסעקטריסעס—דורך b_1 **אדער** P_1, b_2 **אדער** B_2, b_3 **אדער** B_3, פון די מעדיאנעס — דורך m_1 **אדער** M_1, m_2 **אדער** M_2, m_3 **אדער** M_3, לויט דעם ווי אין (158); די לענגען פון די שטרעקעס אויף וועלכע די הויכלייניעס שנײַדן די אַנטקעגנדיגע זײַטן דורכן אות p מיט אַ ציפער רעכטס, וואָס ווײַזט איר סדר, אַרויסגייענדיג פון פונקט A (פיג. 37) AH_3 דורך p_1, H_3B דורך p_2, BH_1 דורך p_3, H_1C דורך p_4, CH_2 דורך p_5, H_2A דורך p_6. דאָס זיינען אייגנטלאך די **פּראָיעקציעס** (169) פון יעדע צוויי זײַטן פון דרײַעק אויף דער דריטער. די לענגען פון די שטרעקעס אויף וועלכע די ביסעקטריסעס שנײַדן די אַנטקעגנדיגע זײַטן דורך א: (פיג. 35) AB_3 דורך K_1, B_3B דורך K_2 א. א. וו. K_3, K_4, K_5, K_6; די שטרעקעס, אויף וועלכע די מעדיאנעס שנײַדן די אנטקעגנדיגע זײַטן וועלן זיין אייגנטלאך די העלפטן פון די דאָזיגע זײַטן; מיר וועלן זיי באַצייכענען דורך a_2, b_2, c_2 די ווינקלען צווישן וועלכע עס איז צוויי שטרעקעס (אויסער די זײַטן אַליין פון 3עק) וועלן מיר באַצייכענען מיט די סימנים פון די שטרעקעס מיט אַ „וו" צווישן זיי. למשל וועט זיין aווM_3 דער ווינקל BCM_3 (פיג. 38) צווישן דער זייט CB (a) און דער מעדיאַנע CM_3 (M_3) פון דער זײַט AB. דיזעלבע באַצייכענונג וועט אויך זיין פאַר גלײַכלענדיגע און רעכטווינקלדיגע 3עקן (פיג. 29). זעלבסטפאַרשטענדלאַך, וועלן אין א גלייכלענדיגן 3עק עטלאַכע עלעמענטן זיין גלייך צווישן זיך און אין אַ רעכטווינקלדיגן 3עק וועלן עטלאַכע הויכלייניעס און פּראָיעקציעס פעלן. ($p_1=O$ $p_6=O$) (פאַרוואָס? 158־**א**.).

אַ טראַנספּאַרטער (32) טאר ניט באַנוצט ווערן ביי די אויפשטעלונגען. די ווינקלען ווערן געגעבן ניט אין גראַדן, נאָר דאַרפן געגעבן און אויפגעשטעלט ווערן ווי אויף די פיגורן (42) און (43)

175. אויפשטעלן א **רעכטווינקלדיגן** דרייעק, אויב געגעבן איז:
1) די קאַטעטע b און נאָך; 1) c (173=ג) 2) B_1 (173=ג)
3) ג 4) H_1 5) M_2 6) ב 7) $c=b$ 8) ב=ג.

9) ב=2ג 10) ב=3ג 11) ב=5ג 12) די דיפערענץ (ב—ג)

II) די היפאָטענוזע a און נאך: 13) b 14) ב 15) ב=ג

16) ב=2ג 17) ב=3ג 18) ב=5ג 19) b=c

20) די דיפערענץ (ב—ג)

III) די ביסעקטריסע B_1 פון רעכטן ווינקל און נאָך: 21) ב

22) ב=ג 23) ב=2ג 24) ב=3ג 25) ב=5ג

IV) די הויכליניע H_1 אויף דער היפאטענוזע און נאָך: 26) ב

27) ב=ג 28) ב=2ג 29) ב=3ג 30) ב=5ג 31) b=c 32) p_4

V) די ביסעקטריסע B_2 פון ווינקל ב און נאָך: 33) c 34) ב

35) ב=ג 36) ב=2ג 37) ב=3ג 38) ב=5ג 39) b=c

40) c און M_2 41) ב און p_4 42) ג און p_4

176. אויפשטעלן א **גלייכלענדיגן** דרייעק, אויב געגעבן איז:

I) דער לענד a און נאך: 1) c 2) H_1 3) M_1 4) H_3

II) די גרונדזייט c און נאָך: 5) ג 6) ב 7) H_3 8) H_2

III) די הויכליניע H_2 פון לענד און נאָך: 9) א 10) ג 11) $c \parallel H_2$ 12) $b \parallel H_2$

IV) די הויכליניע H_3 פון דער גרונדזייט און נאָך: 13) א 14) ג

15) די ביסעקטריסע B_2 פון א גרונדווינקל און דער דאכווינקל ג.

V) **באווייזן:** 1) אַז די סומע פוןביידע זייַלרעכטע, וועלכע זיינען אראפּגעלאזן פון א באליביגן פונקט פון דער גרונדזייַט פון א גלייכלענדיגן 3עק אויף זייַנע לענדן איז, גלייך דער הויכליניע, וואָס ציהט זיך פון אַ גרונדשפיץ אויף אַ לענד, 2) אַז די סומע פון אַלע דרייַ זייַלרעכטע, וועלכע זיינען אַראָפּגעלאָזן פון אַ וועלכן עס איז אינעווייניגסטן פונקט פון אַ גלייַכזייטיגן 3עק אויף זייַנע דרייַ זייטן, איז אַ שטענדיגע גרויס און איז גלייך דער לייַנג פון דער הויכליניע פון ד[illegible]ן דרייַעק; 3) אז די לייַנג פון דער שטרעקע, וועלכע ציהט זיך דורכן שניטפונקט פון די ביסעקטריסעס פון ביידע גרונדווינקלען פון אַ דרייַעק פאַראַלעל צו דער גרונדזייַט, איז גלייַך דער סומע פון ביידע אונטער[illegible]ע [illegible]רעקעס, וועלכע זי האַקט אָפּ פון די לענדן פון דעם דאָזיגן 3עק, 4) אַז אויב די מעדיאנע פון דער גרונדזייַט פון אַ 3עק באטרעפט אַ ה[illegible]לפט פון דער דאָזיגער גרונדזייַט, דאַן איז דער דאַכווינקל אַ רעכטער, 5) אַז, אַראָפּלאָזנדיג פון אַ וועלכן עס איז פונקט פון דער היפּאָטענוזע פון אַ רעכטווינקלדיגן 3עק זייַלרעכטע איף זייַנע קאַטעטעס, באקומען מיר צוויי נייַע רעכטווינקלדיגע 3עקן, וואָס די סומע פון זייערע פּרימעטערס איז גלייַך דעם פּרימטער פון גאַנצן רעכטווינקלדיגן 3עק,

6) אז די מעדיאנעס פון די לענדן פון אַ גלייַכלענדיגן 3עק זיינען גלייַך לאַנג.

177. אויפשטעלן א דרייעק, אויב געגעבן זיינען די דריי עלעמענטן

		א	ב	ג	ד	ה	ו
(1	a, H_3 און:	b	c	p_1	ג	א	M_3
(2	דיזעלבע	M_3ווc	M_3ווa	B_3	K_2		$p_2=2p_1$
(3	דיזעלבע	א=2 ב	א=ג	H_2	B_2	$a+b$	$a-b$
(4	c, M_3 און:	H_3 וו M_3	H_1	a	M_3״c	א	M_3ווa
(5	H_3, ב און:	p_1	H_3״B	K_1	B_3ווc	$a-M_1$	B_2
(6	H_3, א און:	M_3	M_3אc	א-ב	ב	ג	B_3
(7	a, ג און:	p_2	B_3	K_1	א—ב	$a+b$	$a-b$
(8	א, B_3 און:	p_1	H_2	ב	B_3״c	K_1	ג, K_2, B_3
(9	c, M_3ווc און:	H_3	H_1	א	ב	c	ב, ג, K_1
(10	a, p_2 און:	p_1	b	M_3ווc	M_1ווa	M_1	M_3ווa
(11	דיזעלבע	M_1ווc	B_2	$p_1=H_3$	א	c, (א+ב), (א—ב)	
(12	p_2, ב און:	b	א	M_1ווa	M_3	M_1	M_1ווa
(13	דיזעלבע	M_1ווc	B_3	K_1	B_2	H_1	a, ב, K_1
(14	H_3, p_2 און:	p_1	M_3	M_3ווc	M_1ווa	M_1ווc	M_1
(15	H_3, ג און:	p_2	B_3	ב	H_2	א, c, (א+ב)	
(16	($a+b$) מיט ($a-b$) און:*		c	ג	H_3	H_1	M_1
(17	p_1, א און:	p_2	a	a מיט M_3 און נאָך		ב	M_3ווc
(18	c, H_1 און:	H_3	M_3ווa	א	B_2	H_2	p_1
(19	H_1, ב און:	M_3ווc	$c=M_1$	$c=B_2$	M_3ווa	א, c, (א—ב)	
(20	a, c און:	H_1״c	M_3ווa	B_3 ווינקל, ב און		א	B_3ווc
(21	H_3, M_3״a און:	M_3ווc	ב	p_2	H_2, H_1 און	ג אדער א+ב	
(22	א, ג און:	K_1 אדר B_1	K_2, B_3	B_3ווc און	אדער א	H, א+ב, א—ב	
(23	M_3, a, M_3״c	a, ב, M_3ווc		c, ג און א—ב		a, ב, $c=2H_3$	
(24	a און:	$a+b$, H_1		$a-b$, H_1	$a+b$, M_1	ג, K_2	.

*) $a=[(a+b)+(a-b)]:2$; $b=[(a+b)-(a-b)]:2$ (ד=ג=76) (118)

א=[(א+ב)+(א—ב)]:2; ב=[(א+ב)—(א—ב)]:2

178. א סך געאָמעטרישע אויפשטעלונגען ווערן געלייזט מיט דער הילף

פון געאָמעטרישע ערטער (121), ד. ה. אזעלכע ליניעס, וואָס אלע זייערע פונקטן פארמאָגן א באשטימטע איינגשאפט, וועלכע די אויפגאבע פאָדערט. לאָמיר נעמען א ביישפיל:

א) אויף א געגעבענער גראָדער (AB) געפינען דעם פונקט, וואָס זאָל זיין גלייך דער־ווייטערט פון צוויי געגעבענע פונקטן (P און T). פון (121־ב)

ווייסן מיר, אַז אַלע פּונקטן פון דער מיטנזיילרעכטער צו דער שטרעקע PT פאַרמאָגן די געזוכטע איינגנשאַפט. אַזוי ווי אָבער דער געזוכטער פּונקט מוז ליגן אויך אויף דער געזוכטער גראָדער AB, דאַרפן מיר געפינען דעם שניט-פונקט פון דער אויבנדערמאָנטער מיטנזיילרעכטער מיט AB. דער דאָזיגער פונקט וועט באַפרידיגן אַלע געשטעלטע פּאָדערונגען פון דער אויפגאַבע, ווייל ער ליגט אייַנצייטיג סיי אויף דער מיטנזיילרעכטער צו PT, סיי אויף דער געגעבענער גראָדער AB. די אויספאָרשונג פון דער אויפגאַבע זאָגט אונז, אַז אויב די מיטנזיילרעכטע צו PT וועט זיין פּאַראַלעל צו AB, דאַן איז די אויפ-גאַבע אומלייזבאַר, ווייל די מיטנזיילרעכטע וועט זיך ניט שניידן מיט AB; דאָס קען זיין נאָר דאַן, ווען PT⊥AB. ווייטער, אויב די געגעבענע פונקטן ליגן אויף דער גראָדער AB גופא, וועט דער געזוכטער פונקט זיין דער מיטנפונקט פון דער שטרעקע PT א. א. וו. די ווייטערדיגע אויפגאַבעס באַטראַכטן עטלאַכע געאָמעטרישע ערטער, ווי אויך לייזונגען מיט זייער הילף.

בּאַווייזן, אַז דער געאָמעטרישער אָרט פון

ב) פונקטן, וואָס זיינען גלייך דערווייטערט פון צוויי געגעבענע פּאַראַלעלע גראָדע, איז—אַ גראָדע, וועלכע ציהט זיך פּאַראַלעל צו די געגעבענע און גלייך דערווייטערט פון זיי בּיידע; ג)— די ענדעפונקטן פון שטראַלן, וואָס גייען אַרויס פון אַ געגעבענעם פונקט און ווערן געשניטן אויף דער העלפט דורך אַ געגעבענער גראָדע, איז—אַ גראָדע פּאַראַלעל צו דער געגעבענער און דערווייטערט פון איר אויפן זעלבן מרחק, ווי דער פונקט.

ד)—די ענדעפונקטן פון שטראַלן, וואָס גייען אַרויס פון פאַרשיידענע פונקטן פון אַ געגעבענער גראָדער און ציהען זיך אַלע דורך איין געגעבענעם פונקט אין וועלכן זיי ווערן געטיילט אויף דער העלפט, איז אַ גראָדע פּאַראַלעל צו דער געגעבענער און דערווייטערט פון איר אויף אַ מרחק צוויי מאָל גרע-סער, ווי דער מרחק צווישן דער געגעבענער גראָדער און פונקט;

ה)—די שפּיצפונקטן פון אַלע דרייעקן מיט אַ געגעבענער שותּפותדיגער גרונד-זייט און אַ גלייך לאַנגער הויכליניע, איז—אַ גראָדע, פּאַראַלעל צו דער דאָזיגער גרונדזייט און דערווייטערט פון איר אויף אַ מרחק גלייך דער דאָזיגער הויכליניע

ו)—די מיטנפונקטן פון אומקרייזן מיט אַ באַשטימטן געגעבענעם ראַדיוס, וועלכע גייען דורך אַלע דורך אַ געגעבענעם פונקט, איז—אַן אומקרייז אַרום דעם געגעבענעם פונקט געצייכנט מיט אַ ראַדיוס גלייך דעם געגעבענעם;

געגעבן איז די גרונדזייט פון אַ גלייכלענדיגן דרייעק לויט איר לאַנגע און גרויס; אויפשטעלן דעם גלייכלענדיגן דרייעק אַזוי, אַז זיין שפּיצפונקט

ז) זאָל ליגן אויף אַן אַנדער געגעבענער גראָדער; ח) זאָל

ליגן אויף א געגעבענעם אומקרייז (2 לייזונגען); **ט)** זאל זיין דערווייטערט אויף א געגעבענעם מרחק פֿון א געגעבענעם פּונקט, **י)** זאָל זיין גלייך דערווייטערט פֿון די ענדפּונקטן פון א געגעבענער שטרעקע, **יא)** זאָל זיין דערווייטערט אויף א געגעבענעם מרחק פֿון אן אנדער געגעבע-נער גראָדער.

179. אויפשטעלן אַ דרייעק פון די געגעבענע: דעם פּערימעטער $(a+b+c)$ און ביידע גרונדווינקלען **א** און **ב**. **אַנאַליז:** לאָמיר אָננעמען, אַז דער דרייעק ABC (מאַך אַ צייכענונג!) איז דער געזוכטער. פּאַרלענגערנדיג די גרונדזייט AB פון ביידע זייטן אויף שטרעקעס AM (לינקס) גלייך AC און BE (רעכטס) גלייך BC און פאַרבינדנדיג די פּינקטן M און E מיטן פּונקט C וועלן מיר זיך איבערצייגן, אַז די דרייעקן MCA און ECB זיינען גלייכ-לענדיגע ($AM=AC$ און $BE=BC$) און אַז דער ווינקל (2:**א**)$=MCA=CMA$, דאָסזעלבע: (2:**ב**)$=BCE=CEB$, ווייל די ווינקלען **א** און **ב** זיינען דרויסנ-ווינקלען, בנוגע די דרייעקן AMC און BEC; די פּונקטן A און B, אַלס ראַכפּונקטן פֿון די דאָזיגע גלייכלענדיגע דרייעקן, ליגן אויף די מיטנזייַלרעכטע צו די שטרעקעס MC און EC; דער דרייעק MEC איז פולקום באַשטימט דורך דריי זיינע עלעמענטן: $ME=(a+b+c)$ און צוויי ווינקלען (2:**א**)$=M$ און (2:**ב**)$=E$ ד. ה. (וו=ז=וו). **לייזונג:** מיר ציהען אַ גראָדע, שטעכן אָפּ אויף איר די שטרעקע $ME=(a+b+c)$ און שטעלן אויף ביי ביידע ענדפּונקטן אירע די ווינקלען (2:**א**) און (2:**ב**); דער שניטפּונקט C וועט זיך אַליין באַשטימען (72). צו די שטרעקעס MC און CE שטעלן מיר אַוועק מיטנזיילרעכטע, וועלכע וועלן שניידן ME אין די פּונקטן A און B. די דאָזיגע פּונקטן פאַרבינדן מיר מיטן פּונקט C און דער דרייעק ABC איז דער געזוכטער. **באַווייז:** ווינקל A באַ-טרעפֿט $2\times$(2:**א**) ד. ה. **א**, ווינקל B — $2\times$(2:**ב**) ד. ה. **ב**; $AC=AM$ און $BC=BE$ לויט דער אויפשטעלונג ד. ה. $AC+AB+BC=(a+b+c)$ און אַלע פאָדערונגען פון דער אויפגאַבע זיינען באַפרידיגט. **אויספאָרשונג:** די גע-געבענע **א** און **ב** דאַרפֿן באַטרעפֿן צוזאַמען ווייניגער ווי $2d$, ווייל (149).

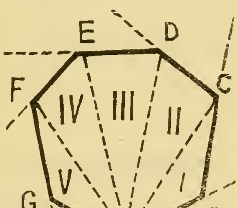
א) אויפשטעלן אַ דרייעק פון די געגעבענע: דעם פּרימטר $(a+b+c)$ און נאָך: 1) H_3 און **א**; 2) H_3 און p_2; 3) p_2 און **ב**; **ב)** אויפ-שטעלן אַ גלייכלענדיגן דרייעק פון די געגעבענע: דעם פּרימטר $(a+b+c)$ און נאָך: 1) **א**; 2) **ג**; 3) H_3 **ג)** אויפשטעלן אַ רעכטווינקלדיגן 3עק פון דעם געגעבענעם פּרימטר און **ב**. **ד)** אויפשטעלן אַ רעכטווינקלדיגן דרייעק פון די געגעבענע: $(b+c)$ און נאָך: 1) a 2) **ג**

3) ב; פון די גענגעבענע: (a+b) און נאָך: 4) c 5) ג 6) ב; פון די גענגע-
בענע: $b+h_1$ און נאָך: 7) ג 8) ב; פון די גענגעבענע: (b—c) און נאָך:
9) ג 10) a 11) ב; פון די גענגעבענע, (a—b) און נאָך: 12) c 13) ג
14) ב; פון די גענגעבענע: ($b-h_1$) און נאָך: 15) ג 16) ב; פון די גענגע-
בענע (א—ב) אין נאָך: 17) h_1 18) (p_1-p_3); ה) אויפשטעלן
אַ גלייכלענדיגן 3עק פון די גענגעבענע: (a+c) און נאָך 1) א 2) ג; פון די
גענגעבענע ($a+h_3$) און נאָך: 3) c, 4) א 5) ג; פון די גענגעבענע ($c+h_1$)
און נאָך: 6) א 7) ג; פון גענגעבענעם ווינקל א און נאָך: 8) a—c 9) $a-h_3$
10) $c-h_1$; פון די גענגעבענע: (a+b—c) מיט ב און נאָך: 11) ג 12) א
13) h_1 ו) אויפשטעלן אַ דרייעק פון די גענגעבענע: (a+b) און
נאָך: 1) c, ב 2) c, ג 3) c. (א—ב) 4) ב, h_3 5) h_3, p_2 6) ב, h_1
7) ג, h_1 8) c, א 9) א, h_3 10) c, h_1 11) c, h_2 12) א, h_2 13) ג, h_2
פון די גענגעבענע: (a—b) און נאָך: 14) c, ב 15) c, ג 16) c, (א—ב)
17) ב, h_3 18) h_3, p_2 19) h_1, ג 20) c, א 21) א, h_3
22) c, h_2; פון די גענגעבענע: ($a-h_2$) און נאָך: 23) b, ב.

קאַפּיטל ז.

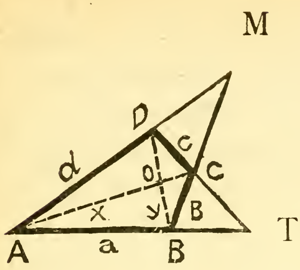
פּירעקן און פּילעקן

180. **פּירעקן און פּילעקן** בכלל ווערן געבילדעט דורך אַ רייע גראַדע שטרעקעס, וועלכע ליגן אויף איין פלאַטע און שניידן זיך אין זייערע ענדפּונקטן אזוי, אז זיי בילדן אַ פיגור, וועלכע עס באַגרעניצט פון אלע זייטן. די גראַדע, וועלכע באַגרעניצן די פיגור, קענען דערביי פאַרנעמען אזא לאַגע, אַז דער פּילעק, אָדער פּירעק, ליגט ענטוועדער אינגאַנצן פון איין זייט (רעכטס, לינקס, אויבן אָדער אונטן) פון יעדער גראַדער, ווי למשל אויף דער פיגור 45, אָדער פון ביידע זייטן אירע, אזוי, אַז די פיגור ווערט געשפּאָלטן פון איינער פון אירע שטרעקעס, אָדער פון דער פאַרלייגערונג פון דער שטרעקע,



פיג. 45.

אויף צוויי טיילן, וועלכע ליגן פון פאַרשיידענע זייטן פון דער דאָזיגער שטרעקע, ווי מיר זעהען עס אויף דער פיג. 46: די פאַרלייגערונג CB פון דער שטרעקע CM פון פּילעק ATCMA שפּאַלט רעמזעלבן פּילעק אין צוויי



פיג. 46

טײלן BCT און BCMA, װעלכע ליגן פון פארשײדענע זײטן פון דער MB. אין ערשטן פאל הײסט דער פילעק **פוקלער** אדער **אויסגעבויכטער** פילעק, און די געבראכענע ליניע, װעלכע באגרעניצט אים— **פוקלע** אדער **אויסגעבויכטע געבראכענע ליניע**; (ABC^D^EFGA פיג. 45) אין צװײטן פאל הײסט דער פילעק, אדער פירעק **אײנגעקנײטשטער** פילעק, און די געבראכענע, װאס באגרעניצט אים, **אײנגעקנײטשטע געבראכענע ליניע** (ATCMA פיג. 46).

די שניטפונקטן פון די שטרעקעס פון פירעק, הײסן **שפיצפונקטן** אדער **עקן** פון פילעק, אדער פירעק; די שטרעקעס אלײן—**זײטן** פון פילעק אדער פירעק. די װינקלען צװישן די שטרעקעס הײסן די װינקלען פון פילעק אדער פירעק. מיר װעלן באצײכענען די שפיצפונקטן פון פילעק, אדער פירעק שטענדיג מיט אײן און דעמזעלבן סדר דורך גרויסע אותיות פון לאטײנישן אלף בית, ארויסגײענדיג פון װעלכן עס איז פונקט אין דער ריכטונג **אנטקעגן** דעם זײגערװײזער A B, C, D, א. א. װ. די לײנגען פון די זײטן װעלן מיר באצײכענען אזוי: AB דורך a, BC—b, CD—c א. א. װ. די גרויס פון די װינקלען: A דורך **א**, B דורך **ב**; C—ג א. א. װ. יעדער װינקל האט, זעלבסטפארשטענדלאך, זײן **דרויסנװינקל** (150־ד), די גרויס פון װעלכן מיר װעלן באצײכענען דורך **א'**, **ב'** א. א. װ. א שטרעקע, װעלכע פארבינדט װעלכע עס איז צװײ שפיצפונקטן פון פילעק, אדער פירעק, הײסט **דיאגאנאלע** פון פילעק, אדער פירעק; די סומע פון די לײנגען פון אלע זײטן פון א פילעק, אדער פירעק הײסט **פערימעטער** פון פילעק, אדער פירעק. די װינקלען, זײטן און דיאגאנאלעס פון פילעק, אדער פירעק, הײסן זײנע **עלעמענטן**.

ו

פירעק

181. **א** פירעק װערט געבילדעט דורך פיר גראדע, װעלכע קענען זיך שנײדן אין פיר, פינף אדער זעקס פונקטן. דערבײ אנטשטײען דרײערלײ פירעקן: (פיג. 46) פירעק ABCDA, װעלכער הײסט **פוקלער** פירעק; פירעק

ATCMA, וועלכער הייסט **אײַנגעקנײַטשטער** פּירעק, און פּירעק BTDMB, וועלכער הייסט **אויסגעדרייטער** פּירעק, ווײַל מיר שטעלן זיך פֿאַר די זײַטן TD און BM אזוי ווי אויסגעדרייט אין די פּונקטן T און M. מיר וועלן באַטראַכטן דערווייל נאָר בּוקלע פּירעקן, אָדער פּשוט פּירעקן, ווי למשל ABCDA (פֿיג. 46). פֿאַרמוליר די באַשטימונג פֿון אַ פּירעק! דער פּירעק פֿאַרמאָגט **צוויי** דיאַגאָנאַלעס AC און BD; זייערע לענגען וועלן מיר באַצייכענען דורך y און x ווי אויף דער פֿיגור 46. זייער שניטפּונקט—O; די גרויס פֿון ווינקל צווישן זיי—ה. **יעדער דיאַגאָנאַלע שפּאַלט דעם פּירעק אין צוויי דרײַעקן** למשל ABC און ACD. דאָס מאַכט אונז קלאָר דעם באַלריגן זאַץ:

א) די סומע פֿון די ווינקלען פֿון יעדן פּירעק באַטרעפֿט 4d (2×2d; 149)

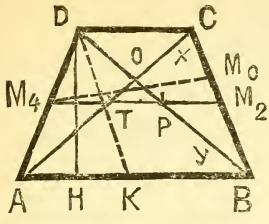
ב) די סומע פֿון די דרויסנווינקלען פֿון יעדן פּירעק באַטרעפֿט אויך 4d, ווייל די סומע פֿון אַלע ווינקלען צוזאַמען מיט די דרויסנווינקלען באַטרעפֿט 8d=4×2d (94); דערפֿון שליסן מיר:

ג) דרײַ געגעבענע ווינקלען פֿון אַ פּירעק באַשטימען פֿאָראויס די גרויס פֿון פֿערטן.

ד) וואָס אַנבאַלאַנגט דער אויפֿשטעלונג פֿון אַ פּירעק בכלל, איז קלאָר, אַז אַ פּירעק קען אויפֿגעשטעלט ווערן, ווען אונז זיינען געגעבן די עלעמענטן פֿון די דרײַעקן, אויף וועלכע ער ווערט געשפּאָלטן פֿון וועלכער עס איז דיאַגאָנאַלע, ד. ה. מען דאַרף אונז געבן 6 עלעמענטן (צו דרײַ פֿון יעדן 3עק); אזוי ווי אָבער די דאָזיגע דרײַעקן האָבן שטענדיג אַ שותּפֿותדיגע זײַט (די דיאַגאָנאַלע), איז גענוג 5 עלעמענטן. **אַ פּירעק ווערט פֿולקום באַשטימט דורך פֿינף עלעמענטן זײַנע, צווישן וועלכע עס דאַרפֿן זײַן מינדעסטנס צוויי ליניאַלע**, ווײַל מער ווי דרײַ ווינקלען דאַרפֿן ניט געגעבן ווערן (ג)

182. אַ פּירעק, וואָס נאָר צוויי פֿון זיינע זייטן זיינען פּאַראַלעל, הייסט **טראַפּעציע** [פֿיג. 47]. די פּאַראַלעלע זײַטן הייסן—**גרונדזײַטן**, די ניט פּאַראַלעלע—**לענדן** פֿון דער טראַפּעציע. אַ טראַפּעציע ווערט מייסטנטײלס געצייכנט אַזוי, אַז די גרונדזײַטן ציהען זיך וואָגראָד אויפֿן פּאַפּיר. אַ ווײַלרעכטע פֿון אַ וועלכן עס איז פּינקט פֿון איין גרונדזײַט פֿון דער טראַפּעציע צו דער צווייטער, הייסט — **הויכליניע פֿון דער טראַפּעציע** [DH פֿיג. 47] די ווײַטערדיגע לערזאַצן באַהאַנדלען די אייגנשאַפֿטן פֿון דער טראַפּעציע:

א) אַ גראָדע (M_4M_2), **וועלכע ציהט זיך דורכן מיטנפּונקט**



פיג. 47.

פון אַ לענד פון דער טראַפּעציע פּאַראַלעל צו אירע גרונדזייטן, שניידט דעם צווייטן לענד אויך אין מיטנפּונקט (M_2) פּאָראויסב.:

1) $AM_4=M_4D$ 2) $M_2M_4 \| AB$

פעסטשטעלונג: דער שניטפּונקט M_2 פון M_4M_2 מיט BC איז דער מיטנפּונקט אירער, ד. ה. $BM_2=M_2C$; הילפסליניעס: די דיאַגאָנאַלעס AC און BD באַווייז: אין 3עק ADB איז P דער מיטנפּונקט פון DB (א=167) און דעריבער זיינען אין 3עק CDB די שטרעקעס M_2B און M_2C גלייך צווישן זיך (א=167) ד. ה. M_2 איז דער מיטנפּונקט פון CB.

די שטרעקע, וועלכע פאַרבינדט די מיטנפּונקטן פון ביידע לענדן פון אַ טראַפּעציע, הייסט — **מיטלסטע שטרעקע** פון דער טראַפּעציע

ב) (פאַרקערט פון א) **די מיטלסטע שטרעקע פון א טראַפּעציע איז פּאַראַלעל צו אירע גרונדזייטן און באַטרעפט אַ העלפט פון זייער סומע:** פּאָראויסב.: M_4M_2 איז די מיטלסטע שטרעקע פון דער טראַפּעציע (פיג. 47) פעסטשט.: 1) $M_4M_2 \| AB$, 2) $M_4M_2=(AB+CD):2$; באַווייז (דורכן היפוך): וואלט M_4M_2 ניט געווען פּאַראַלעל צו AB, דאַן וואָלט עס געווען אַ וועלכע עס איז אַנדערע גראָדע, M_4M_0 למשל, און מיר וואָלטן לויט (א) געהאַט, אַז M_0 איז דער מיטנפּונקט פון BC ד.ה. $CM_0=(BC:2)$, לויטן פּאָראויסבאַדונג אָבער איז $CM_2=(CB:2)$ און דערפון מוזן מיר שליסן, אַז $CM_0=CM_2$, אבסורד! (46). בלייבט, אַז אַן אַנדער גראָדע דורך M_4 אויסער M_4M_2 קען ניט זיין $\|$על צו AB; אויב אַזוי האָבן מיר פון די דרייעקן ADB און DCB; $M_4P=(AB:2)$ און $PM_2=(DC:2)$ אדער: $M_4P+PM_2=(AB+DC):2$ ד. ה. $M_4M_2=(AB+DC):2$;

ג) די סומע פון ביידע ווינקלען, וואס ליגן ביי איין און דעמזעלבן לענד פון אַ טראַפּעציע באַטרעפט $2d$, ווייל $AB \| DC$ און CB (אָדער AD) די שניידליניע (IV=139)

ד) צוויי געגענעבענע ווינקלען פון אַ טראַפּעציע, וואָס ליגן **ניט** ביי איין און דעמזעלבן לענד אירן, באַשטימען פאָראויס די גרויס פון די איבעריגע ווינקלען פון דער טראַפּעציע (ג) (IV=139)

ה) וואָס אנבאַלאַנגט דער אויפשטעלונג פון א טראַפּעציע, איז קלאָר, אַז צוליב דער פּאַראַלעלקייט פון צוויי זייטן אירע פאַלט אַרויס איין ווינקל פון די 5 עלעמענטן, וועלכע דאַרפן געגעבן ווערן צום אויפשטעלן

(**אדער צום באשטימען די קאנגרוענץ**) פון א פּירעק בכלל, ווייל איין ווינקל ביי אַ לענד באשטימט שוין די גרויס פון צווייטן. **א טראַפּעציע ווערט פולקום באשטימט דורך פיר עלעמענטן אירע, צווישן וועלכע עס דארפן זיין מינדעסטנס צוויי ליניאלע.**

183. א טראַפּעציע, וואס אירע לענדן (AD און BC) זיינען גלייך לאנג, הייסט **גלייכלענדיגע טראַפּעציע** (פיג.47) אויסער די אייגנשאפטן פון אַ טראַפּעציע בכלל, פארמאגט אַ גלייכלענדיגע טראַפּעציע נאך אייגענע ספּעציעלע אייגנשאפטן:

א) די ווינקלען, וואס ליגן ביי דערזעלבער גרונדזייט פון א גלייכלענדיגער טראַפּעציע, זיינען גלייך צווישן זיך.

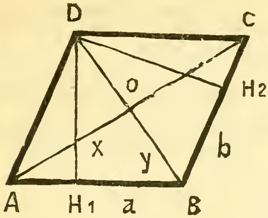
ב) (פאַרק. צו **א**) אַ טראַפּעציע, וואס די ווינקלען אירע, וועלכע ליגן ביי דערזעלבער גרונדזייט אירער, זיינען גלייך—איז אַ גלייכלענדיגע (פיג.47). פאראויסב.: AD=CB; פעסשט.: **א**=**ב**; הילפליניע DK||CB; באווייז: DK=CB (145) צוליבן פאראויסב. איז AD=DK (47) און דער 3עק ADK איז אַ גלייכלענדיגער; דערפון שליסן מיר, אז ∢DAK=AKD אבער ∢AKD=**ב** (הינפווינקלען!) דעריבער איז: ∢DAB=ABC ד. ה. **א**=**ב** אויפן זעלבן שטייגער ווערט באווייזן אויך דער פארקערטער זאץ. פון (**א**) שליסן מיר:

ג) די סומע פון די אנטקעגנדיגע ווינקלען פון אַ גלייכלענדיגער טראַפּעציע באטרעפט 2d, ווייל (182=ג)

ד) אין א גלייכלענדיגער טראַפּעציע זיינען די דיאַגאָנאַלען גלייך צווישן זיך. מ'באַטראַכט די 3עקן ADB און ACB, זיי זיינען קאָנגרוענט (ז=ו=ז און 165=ג)

ה) ביי דער אויפשטעלונג פון א גלייכלענדיגער טראַפּעציע פאלט אַרויס איין ווינקל פון די פיר עלעמענטן, וועלכע זיינען נויטיג צום אויפשטעלן (**אדער פאראויסבאשטימען די קאנגרוענץ**) פון א טראַפּעציע בכלל, ווייל יעדער ווינקל פון א גלייכלענדיגער טראַפּעציע באשטימט די גרויס פון די איבעריגע (**א** און ג). **א גלייכלענדיגע טראַפּעציע ווערט פולקום באשטימט דורך דריי עלעמענטן אירע, צווישן וועלכע עס דארפן זיין מינדעסטנס צוויי ליניאלע.**

184. **פאַראַלעלאָגראַם.** אַ פירעק, וואס זיינע אַנטקעגנדיגע זייטן זיינען פאַראַלעל, הייסט **פאַראַלעלאָגראַם** (פיג. 48). AD||BC און



פיג. 48.

$AB \parallel DC$. מיר װעלן שרײַבן קירצער: „פּארלגראַם". לאָמיר באַטראַכטן זײַנע אײגנשאַפטן.

א) די סומע פון בײדע װינקלען, װאָס ליגן בײַ אײן זײַט פון פּאַראַלעלאָגראַם באַטרעפט 2d (IV-139) און פאַרקערט:

ב) אַ פירעק, װאָס די סומע פון בײדע װינקלען, װעלכע ליגן בײַ װעלכער עס איז אײן זײַט װײנער, באַטרעפט 2d איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם. איז **א**+**ב**=2d, דאַן איז $AD \parallel CB$ (ג-135), איז **ב**+ג=2d, דאַן איז $AE \parallel DC$ און דער פירעק ABCD איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם.

ג) **די אַנטקעגנדיגע װינקלען פון אַ פּאַראַלעלאָגראַם זײנען גלײַך צװישן זיך** (143) און פאַרקערט:

ד) אַ פירעק, װאָס זײנע אַנטקעגנדיגע װינקלען זײַנען גלײך צװישן זיך, איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם. איז **א**=ג און **ב**=ד און נאָך **א**+**ב**+ג+ד=2d (**א**-181), דאַן מוז זײַן 2**א**+2**ב**=4d (52), אָדער **א**+**ב**=2d (51); דאָסועלבע 2**ב**+2ג=4d, אָדער **ב**+ג=2d און דערפון שליסן מיר (זעה **ב**), אַז דער פירעק איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם. דערפון שליסן מיר װידער:

ה) אײן װינקל פון פּאַראַלעלאָגראַם באַשטימט פאָראױס די גרויס פון אַלע איבעריגע.

ו) **די אַנטקעגנדיגע זײַטן פון אַ פּאַראַלעלאָגראַם זײַנען גלײַך צװישן זיך**, װײל (145); און פאַרקערט:

ז) אַ פולער פירעק, װאָס זײַנע אַנטקעגנדיגע זײַטן זײַנען גלײַך צװישן זיך, איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם. אין דער אמתן: איז $AB=DC$ און $AD=BC$, דאַן זײַנען די דרײעקן ADB און DBC, (װעלכע האָבן אַ שותּפותדיגע זײַט DB) דעקיג (ז-ז-ז) און װײַל (ג-165) שליסן מיר, אַז: $\sphericalangle ADB=DBC$ און $AD \parallel BC$, װײטער $\sphericalangle ABD=BDC$ און $AB \parallel DC$

ה) (פאַרקערט צו ו): **אַ פירעק, װאָס צװײ אַנטקעגנדיגע זײַנע זײטן זײַנען גלײַך און פּאַראַלעל, איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם.** איז $AD=BC$ און $AD \parallel BC$ דאַן, איז $\sphericalangle ADB=DBC$ (I-139) און די דרײעקן ADB און DBC זײנען קאָנגרועגט (ז=װ=ז) און װײַל (ג-165) שליסן מיר, אַז $AB=DC$, װײטער זעה (ז). דער באַװײַז פון (ז) און (ה) האָט אונז קלאָר געמאַכט, אַז

ט) יעדע דיאַגאָנאַלע פון אַ פּאַראַלעלאָגראַם שפּאַלט אים אין צװײ דע-

קיגע (גלייכע) דרייעקן.

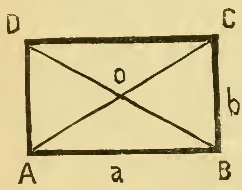
י) די דיאַגאָנאַלען פֿון אַ פּאַראַלעלאָגראַם שנײַדן אײנע די אנדערע אויף דער העלפֿט (ד.ה. אין זייערע מיטנפּונקטן.) דאָס ווערט קלאָר פון דער רעקיגקייט פון די 3עקן AOB מיט DOC, ווײַל $AB=DC$ און $\sphericalangle ABO=ODC$ און $BAO=OCD$ (וו=ז=וו) און (ג=165) ד. ה. $AO=OC$ און $BO=OD$; פאַרקערט:

יא) א פירעק, וואָס זײנע דיאַגאָנאַלען שנײַדן אײנע די אנדערע אויף דער העלפט, איז א פּאַראַלעלאָגראַם. איז $AO=OC$ און $BO=OD$, דאַן זיינען די דרייעקן AOB און DOC רעקיג (ז=ז=ז) און ווײַל (ג=165) איז: $\sphericalangle ODC=OBA$ ד. ה. $AD \| BC$; אויפן זעלבן שטײגער ווען מיר דער־גײן, אַז $AB[]DC$ און $ABCD$ איז א פּאַראַלעלאָגראַם.

יב) אויסער די אַלע אויבנדערמאָנטע אײגנשאַפטן, פאַרמאָגט נאָך אַ פּאַרלגראַם זעלבסטפאַרשטענדלאַך אַלע אײגנשאַפטן פֿון אַ פירעק בכלל, ווי אויך פון אַ טראַפּעציע (נאָר ניט קיין גלײַכלענדיגער!), ווײַל אין זײַן באַשטימונג גײען אריין די באַשטימונגען פון בײדע דערמאָנטע פיגורן.

יג) בײַ דער אויפשטעלונג פון אַ פּאַראַלעלאָגראַם (אָדער פּאָראויסבאַשטי־מונג פֿון רעקיגקייט), פֿאַלט אויך ארויס א ווינקל פֿון די פיר עלעמענטן, וועלכע באַשטימען אַ טראַפּעציע בכלל צוליבן זעלבן טעם ווי בײַ אַ גלײַכל. טראַפּ.

185. רעכטעק. אַ פּאַראַלעלאָגראַם, וואָס אַלע זיינע ווינקלען זײַנע רעכטע, הײסט **רעכטעק** (פיג. 49). עס איז קלאָר, אַז אַ רעכטעק פאַרמאָגט אַלע אײגנשאַפטן פון א פּאַראַ־לעלאָגראַם (184). אויסערדעם האָט ער נאָך אַן אײגנשאַפט:



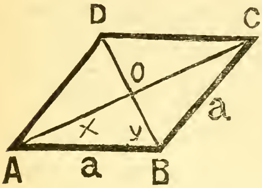
פיג. 49.

א) אין אַ רעכטעק זיינען בײדע דיאַגאָנאַלען גלײַך צווישן זיך. און פאַרקערט:

ב) אַ פּאַראַלעלאָגראַם, וואָס בײדע זײַנע דיאַגאָ־נאַלען זיינען גלײַך לאַנג, איז אַ רעכטעק. דער זאַץ (**א**) קען לײַכט באַוויזן ווערן, פאַרגלײַכנדיג בײדע רעכטווינקלדיגע דרײַעקן ADB און ACB, וועלכע שטימען אײַן אין בײדע קאַטעטעס (184). פון זייער קאָנגרו־ענץ (161־**א**) שליסן מיר, אַז $AC=BD$; פאַרקערט: פון דער גלייכקייט $AC=DB$ און פון (ז=ז=ז) שליסן מיר, אַז **א**=**ב**, און אַזוי ווי **א**+**ב**=2d (184־**א**) איז **א**=**ב**=d ד. ה. דער פירעק $ABCD$ איז אַ רעכטעק.

ג) בײַ דער אויפשטעלונג פון אַ רעכטעק, פאַלן די ווינקלען ארויס, ווײַל

זיי זיינען פאראויס באקאנט (92, 93). **א רעכטעק ווערט פולקום באשטימט דורך צוויי זיינע ליניאלע עלעמענטן.**



פיג. 50.

.186 **ראמב.** א פאראלעלאגראם, וואס אלע זיינע זייטן זיינען גלייך לאנג, הייסט **ראמב.**

(פ. 50) **דער ראמב פארמאגט**, פארשטייט זיך, **אלע אייגנשאפטן פון פאראלעלאגראם.** זיינע אייגענע ספעציעלע אייגנשאפטן זיינען:

א) די דיאגאנאלעס פון ראמב שטייען ווילרעכט איינע צו דער אנדערער און טיילן זיינע ווינקלען אויף דער העלפט און פארקערט:

ב) א פאראלעלאגראם, וואס זיינע דיאגאנאלעס שטייען ווילרעכט איינע צו דער אנדערער, איז א ראמב;

ג) א פאראלעלאגראם, וואס זיינע דיאגאנאלעס טיילן זיינע ווינקלען אויף דער העלפט, איז א ר מב. דער זאץ (**א**) ווערט קלאר דערפון, וואס די פונקטן C און A ליגן אויף דער מיטנזיילרעכטער צו DB, ווייל $DC=BC$ און $AD=AB$ (117-ג) און (69). איז CA די מיטנזיילרעכטע פון דער גרונדזייט DB פון גלייכלענדינן 3עק DCB, דאן שפאלט זי דעם ווינקל C אויף דער העלפט (153-ג); דאסזעלבע איז DB בנוגע די ווינקלען **ב** און ד. דער זאץ (**ב**) ווערט לייכט באוויזן דורך דעם, וואס די רעכטווינקלדיגע 3עקן AOB און DAO שטימען איין אין זייערע קאטעטעס און דעריבער איז $AD=AB$ און (184-ד). דער זאץ (ג) לאזט זיך אויך לייכט באווייזן: **א**=ג (184-ג) און איז נאך 2:**א**=2:ג דאן איז דער 3עק ADC א גלייכלענדיגער (155) ד. ה. $AD=DC$, אבער $AD=BC$ און $DC=AB$ (184-ד) הייסט עס, $AB=BC=CD=DA$.

ד) ביי דער אויפשטעלונג פון א ראמב, דארפן מיר האבן ניט מער ווי א ווינקל מיט א זייט. **א ראמב ווערט פולקום באשטימט דורך צוויי עלעמענטן: א שטרעקע מיט א ווינקל.**

.187 **קוואדראט**, א ראמב וואס אלע זיינע ווינקלען זיינען רעכטע הייסט **קוואדראט** (פיג. 9, זייטל 14) **דער קוואדראט פארמאגט די אייגנשאפטן פון אלע אויסגערעכנטע פירעקן** ווייל זיין באשטימונג אנטהאלט אין זיך די באשטימונגען פון זיי אלע.

א) **ביי** דער אויפשטעלונג פון א קוואדראט דארף געגעבן ווערן ניט מער ווי א זייט, א באשטימטע שטרעקע זיינע בכלל: **א קוואדראט ווערט פולקום באשטימט דורך איין ליניאלן עלעמענט זיינעם.**

162. אויפגאַבעס. באווייזן: 1) אַז די סומע פון יעדער פּאָר אַנטקעגנדיגע זייטן פון יעדן פירעק איז קלענער פון דער סומע פון זיינע ביידע דיאגאנאלעס און גרעסער פון זייער דיפערענץ; 2) אַז דער שניטפּונקט פון די דיאגאנאלעס פון יעדן פירעק איז דערווייטערט פון זיינע שפּיצפּונקטן ווייניגער ווי יעדער אַנדערער פּונקט, וואָס ליגט אין דעם דאָזיגן פירעק; 3) אַז די שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן כסדר די מיטנפּונקטן פון די פיר זייטן פון יעדן פירעק, בילדן אַ פּאַראַלעלאָגראַם; 4) אַז די שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן כסדר די מיטנפּונקטן פון די פיר זייטן פון יעדן ראָמב בילדן אַ רעכטעק; 5) אַז די שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן כסדר די מיטנפּונקטן פון די פיר זייטן פון יעדן רעכטעק, בילדן אַ ראָמב; 6) אַז די שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן די מיטנפּונקטן פון יעדער פּאָר אַנטקעגנדיגע זייטן פון יעדן פירעק, שניידן זיך אין זייערע מיטנפּונקטן ד. ה. אויף דער העלפט; 7) אַז די שטרעקע, וועלכע פאַרבינדט די מיטנפּונקטן פון ביידע דיאַגאָנאַלעס פון אַ טראַפּעציע, באַטרעפט אַ העלפט פון דער דיפערענץ פון איהרע גרונדזייטן; 8) אַז די מיטלסטע שטרעקע פון אַ טראַפּעציע האַקט אויף דער העלפט יעדע שטרעקע, וועלכע פאַרבינדט צוויי באַליביגע פּונקטן פון איהרע גרונדזייטן; 9) אַז דער ווינקל צווישן די ביסעקטריסעס פון צוויי שכנותדיגע ווינקלען פון יעדן פירעק באַטרעפט אַ העלפט פון דער סומע פון די איבעריגע צוויי ווינקלען פון דאָזיגן פירעק; 10) אַז אין אַ פּאַראַלעלאָגראַם איז יענע דיאגאנאלע לענגער, וועלכע ליגט אַנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל זיינעס; 11) אַז די דיאַגאָנאַלעס פון אַ גלייכלענדיגער טראַפּעציע בילדן צוויי גלייכלענדיגע דרייעקן, מיט פּאַראַלעלע גרונדזייטן;

12) אַז ביידע שטרעקעס, וואָס פאַרבינדן די מיטנפּונקטן פון די גרונדזייטן און פון די לענדן פון אַ גלייכלענדיגער טראַפּעציע, שניידן זיך מיט אַ רעכטן ווינקל.

אויסרעכענונג: געגעבן איז אַ רעכטעק:

13) איין דיאגאנאלע איז צוויי מאָל אזוי גרויס ווי אַ זייט; ווי גרויס איז דער ווינקל צווישן די דיאגאנאלעס? 14) זיינע דיאגאנאלעס שניידן זיך מיט אַ ווינקל פון 12^0, און די גרעסערע זייטן זיינע איז 20 צל. דערווייטערט איינע פון דער צווייטער; ווי לאַנג זיינען די דיאגאנאלעס? 15) זיינע זייטן באַטרעפן: 8 צל. און 10 צל.; די ביסעקטריסעס פון זיינע פיר ווינקלען בילדן אַ נייעם פירעק; ווי לאַנג זיינען די דיאגאנאלעס פון דעם דאָזיגן פירעק? 16) דיזעלבע ווי (15): די ביסעקטריסעס

פון זיינע דרויסנווינקלען בילדן דעם נײַעם פירעק, ווי לאנג זיינען די דיא-
גאנאלעס פון דעם דאָזיגן פירעק? **געגעבן איז א טראַפּעציע:**
17) איר פּרימטר באַטרעפט 40 פוס, די מיטלסטע שטרעקע—12 פוס; ווי
גרויס זיינען די סומעס פון ביידע גרונדזײַטן און פון ביידע לענדן?
18) איר פּרימטר באַטרעפט 48 ווערש.; די לענדן: איינער 4 ווערש., דער צווייטער
—3 ווערש.; ווי לאנג איז די מיטלסטע שטרעקע? 19) איר מיטלסטע
שטרעקע באַטרעפט 12 צל., איין גרונדזייט איז דאָפּלט אזוי לאנג ווי די
צווייטע; ווי לאנג איז יעדע? 20) אירע גרונדזייטן באַטרעפן 28 צל.
און 16 צל., איין לענד איז געטײלט אין 6 גלייכע חלקים, דורך די אָנגע-
מערקטע פּונקטן זיינען געצויגן פּאַראלעלע שטרעקעס צו די גרונדזייטן; ווי
לאנג איז יעדע פון די נײַגעצויגענע שטרעקעס? **געגעבן איז א גלייכ-**
לענדיגע טראַפּעציע: 21) איר פּרימטר באַטרעפט 108 סמ.; די
דיפערענץ פון די גרונדזייטן—12 סמ.; די גרעסערע גרונדזייט באַטרעפט $^7/_8$
פון לענד; ווי לאנג זיינען אירע זייטן? 22) **א**=$^2/_3$d, דער לענד—6 צל.;
דער פּרימטר 38 צל.; ווי לאנג זיינען די גרונדזייטן? 23) איר גרעסערע
גרונדזייט איז דאָפּלט אזוי גרויס ווי דער לענד, די מיטלסטע שטרעקע—11
צל., דער פּרימטר—34 צל.; ווי גרויס זיינען די לענדן און די גרונדזייטן?
געגעבן איז א פּאַראלעלאָגראם: 24) די לײַנג פון איין זייט באַ-
טרעפט 18 צל., פון דער צווייטער—15 צל. און וועלכע גרעניצן קענען זיך ענ-
דערן די לײַנגען פון די דיאגאנאלעס? 25) זיין פּרימטר 24 צל., די ביסעק-
טריסע פון איין ווינקל זײַנעם שפּאַלט זיינע א זייט אויף דער העלפט; ווי לאנג זיי-
נען די זייטן? 26) זיין פּרימטר 36 צל., איין זייט איז דאָפּלט אזוי גרויס ווי
די צווייטע; ווי גרויס איז יעדע? 27) די שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן דעם
מיטנפּונקט פון איין זייט זײַנער מיט די מיטנפּונקטן פון ביידע שכנותדיגע זייטן
באַטרעפן 7 צל. און 9 צאָל, ווי לאנג זיינען זיינע דיאגאנאלעס? **געגעבן**
איז א ראמב: 28) די קלענערע דיאגאנאלע באַטרעפט $^3/_4$ פון פּרימטר; ווי
גרויס זיינען די ווינקלען? 29) **א**=$^2/_3$d, די קלענערע דיאגאנאלע—8 סמ.
ווי לאנג איז דער פּרימטר? 30) **ב**=120°, דער פּרימטר—64 ווערש.;
ווי לאנג איז די קלענערע דיאגאנאלע?

189. אין אַלע ווײַטערדיגע אויפגאבעס ווערן באַנוצט די פאַרקירצונגען און באַצייכענונגען פון די עלעמענטן פון פיגורן ווי אין 174) 181) ווי אויך פון די צייכענונגען פון די געהעריגע פיגורן.

א) אויפשטעלן די אָנגעוויזענע פיגורן פון די געגעבענע עלעמענטן:

רעכטעק			ראמב			קוואד־ראט	
III	II	I	III	II	I		
aווx און:	ה און:	a און:	a און:	א און:	א און:		
a+b	x	B	x	x—y	a	a	1
a—b	a+b	x	H	a+H	x	x	2
פּרימטר און:	a—b	ה	x—y,	a—H	H	a+x	3
ה	x און:	aווx	x+y	x און:	a+x	x—a	4
	a+b	b+x		y	x—a		5
	a—b			H	x+y		6

ב) אויפשטעלן א פּאַראַלעלאָגראַם פון די עלעמענטן (פיג.48)(184)

VI	V	IV	III	II	I	
ymа,xווа און	a און נאָך:	(a+b) און:	aווx און:	H און:	a אין:	
x+y	(B+x) ב	ב x	a x	א x	ב B	1
x—y	(x—B) ב	א H	xווB ,a	x a	x B	2
פּרימטר און:	(b+H) א	H x	xווB ,x	x B	ב x	3
x ב	(b—H) א	(a—b) און:	xווB ,H	y x	y x	4
H א	(x+y) ה	ב x	x=y ,H	ה x	ה x	5
x H	(x—y) ה	H x	(x+y) ,a	א H	H B	6
aווx -bווx,H,x	a=2b,ב,H	ה y x	(x—y) ,a		א H	7

ג) איפשטעלן א טראַפּעציע פון די עלעמענטן (פיג. 47) (ה=182)

VI	V	IV	III	II	I	
a, H און:	a, b און נאָך:	a, b און:	a, b און:	a, b און:	a, b און:	
ב א	(ב+א) c	x=y ב	c y	x c	ב d	1
ב d	(ב+א) d	c=d ב	c d	x d	ב א	2
ב y	(ב—א) d	c=d א	c א	x y	ב y	3
ה x	ב2=א H	c=d ,x	א d	H c	ב c	4
xווa ,yווa	(ב—א) H	yווa ,xווa	ה H	H d	ב ה	5
x c a ב	xווa=yווa ,H	2x=y ,H	xווa ,c	H y	ג א	6
x c a H	a H c ב	a y c x	x=y ,H	H ד	ג ד	7

ד) אויפשטעלן **א טראפעציע** פון די עלעמענטן (פיג. 47) (ה=182)

A):(a+b) אָדער B):(a—b) און נאָך: 1) **ב**xc 2) **ב**Hc 3) **א**H 4) **ב**Hה

5) **ב**yH 6) **ב**xd 7) **ב**xy 8) **בה**x 9) xcd 10) **בא**x 11) **ד**xc

12) cx און xHc 13) **ה**xH 14) xyH 15) **ב**, xHb, yHb (אויפגאבעס 30)

פון די עלעמענטן: 16) (a—b), xHd, xHc, x.

ה) אויפשטעלן א **טראפעציע** פון די עלעמענטן: (a—c), x, און נאָך:

1) **אב** 2) **א**b 3) b, **א+ב** 4) bd 5) Hb 6) **א**H

7) **א**,(d+b) 8) **א**,(b—d) 9) **א+ב**, b+d 10) **א+ב**, b—d

11) **א—ב**, b+d 12) **א—ב**, b—d 13) **ה**y.

ו) אויפשטעלן **א טראפעציע** פון די עלעמענטן: (a+c) און נאָך:

1) **ב**xy 2) **ה**bx 3) **בה**x 4) Hbx 5) **ב**xH 6) **א**b**ב**

7) **א**db 8) db, **א+ב** 9) **אב**H 10) bdH 11) db, **א—ב**

12) **אב**, b+d 13) **אב**, b—d 14) **א**H, b+d 15) **א**H, b—d

ז) אויפשטעלן **א גלייכלענדיגע טראפעציע** פון די עלעמענטן

(פיג. 47) (ה=183) 1) ab**ב** 2) xab 3) Hab 4) ab**ה**

5) cab 6) **ב**ax 7) ax, aHH 8) aHx 9) a**ה**x

10) a**ה**א 11) ca**א** 12) a**א**H 13) aH, aHx 14) x**ב**b

15) xb, xHb 16) xHb 17) b**ה**x 18) H**א**x 19) **ב**Hx

20) Hb, xHb 21) **בה**c 22) b**ה**H 23) **אה**H 24) bx, a—c

25) **א**x, a—c 26) **ה**H, a—c 27) **ה**x, a—c

ח) אויפשטעלן **א פירעק** (פיג 46) (ד=181) פון די עלעמענטן:

a,b,c און נאָך: 1) xd 2) xy 3) **ב**d 4) **ה**x 5) **א**x

6) **ד**x 7) x, **א=ב** 8) yHb, yHa 9) **ג**ב 10) **בה**

11) **ב**, x=y 12) d, **א+ב**; פון די עלעמענטן: x,a,b און נאָך:

13) xHd, xHc 14) y, yHa 15) **אד** 16) y**ה** 17) **אג** 18) y**א**

19) y, yHa=yHb 20) y, **א+ד** 21) **ב**, **א+ד** 22) **ב**, c=d

23) y, c=d; פון די עלעמענטן: a**ב**x און נאָך: 24) c**א** 25) y**א**

26) y**ג** 27) **גד** 28) **אה** 29) d**ג** 30) b=c=d 31) c**ד**

32) c**ג** 33) **אג**

ט) אויפשטעלן **א פירעק** פון די געגעבענע עלעמענטן:

A) (a+b, אָדער B) (a—b) און נאָך: 1) **ב**dc x 2) **גב**cx 3) **ב**cyx

4) **אבג**x 5) **אב**yx 6) **הב**cx 7) **אבה**x 8) **בד**cd

9) **אד**cd 10) **א**dcx 11) **א**dcy 12) **אג**dy 13) **א**dyx

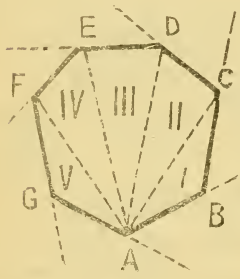
14) **אה**dy (אויפגאבעס 28).

11

פ י ל ע ק

190, **א** פלאטע, גראדלינינע פיגור, וועלכע איז באגרעניצט פון אלע זייטן דורך מער ווי פיר גראדע, הייסט **פילעק**. לויט דער צאל פון די זייטן קענען פילעקן זיין: פינפעקן, זעקסעקן, זיבנעקן א. א. וו. מיר וועלן באטראכטן נאר פוקלע פילעקן (180). די וויכטיגע זאצן באהאנדלען א רייע אייגנשאפטן פון פילעקן בנוגע דער צאל פון זייערע דיאגאנאלעם (180) און דער סומע פון זייערע ווינקלען און דרויסנווינקלען.

א) די צאל פון די דיאגאנאלעם, וואס מ'קען ציהען פון יעדן **שפיצפונקט** פון פילעק **איז מיט דריי ווייניגער פון דער צאל** פון זיינע **זייטן** (אדער עקן). פיג. 51)



פיג. 51.

באווייז: צום זעלבן שפיצפונקט (A למשל), פון וועלכן די דיאגאנאלעם גייען ארויס, ווי אויך צו די צוויי שכנותדיגע שפיצפונקטן פון ביידע זייטן פון דאזיגן פונקט קענען קיין דיאגאנאלעם ניט געצויגן ווערן און דעריבער ווערן די 3 פונקטן אויסגעשלאסן פון דער צאל שפיצפונקטן פון פילעק. באצייכענענדיג די צאל זייטן (אדער עקן) פון פילעק דורכן אות n, וועט די צאל דיאגאנאלעם פון יעדן פילעק אויסמאכן: n—3

ב) די צאל דיאגאנאלעם, וואס קענען געצויגן ווערן **פון אלע עקן פון פילעק, באטרעפט א העלפט פון דעם פראדוקט פון דער צאל דיאגאנאלעם** פון יעדן עק **אויף דער צאל עקן** (אדער זייטן), ד. ה. $\frac{n(n-3)}{2}$ **באווייז**: פון יעדן עק קען מען ציהען לויט (**א**) (n—3) דיאגאנאלעם, פון אלע עקן וואלט געדארפט זיין n(n—3), ווייל אבער יעדע דיאגאנאלע ווערט דערביי געצויגן צוויי מאל (למשל, די דיאגאנאלע **AD** פון עק A און די זעלבע דיאגאנאלע DA פון עק D), דארף מען דעם פראדוקט n(n—3) טיילן דורך 2.

ג) **די צאל דרייעקן**, אויף וועלבע דער פילעק ווערט געשפאלטן דורך די דיאגאנאלעם פון איין עק זיינעם, **איז מיט** 2 **ווייניגער פון דער צאל** (n) פון זיינע **זייטן**, ד. ה. n—2.

באווייז: (פיג 51) יעדע פון די דיאגאנאלעם, וואס ציהען זיך דורך איין עק,

אייסער דער לעצטער טײלט אויס פון פּילעק צו אײן דרייעק, נאָר די לעצטע דיאַגאָנאַלע (AF) טײלט אַיים אַזעלכע צוויי. הײסט עס, אַז די צאָל דרײַעקן איז מיט אײנע מער פֿון דער צאָל דיאַגאָנאַלעס ד. ה. $n-3+1=n-2$.

ד) די סומע פון די **אינעװײניגסטע** װינקלען פֿון אַ פּילעק באַטרעפט $2d$, גענכפלט אויף דער צאָל זײַנע זײטן מינוס צװײ ד. ה. $2d(n-2)$ װײל דער פּילעק װערט געשפּאָלטן אין $(n-2)$ דרײַעק;(ג)אין (149).

ה) די סומע פֿון אַלע דרויסנווינקלען פֿון אַ פּילעק באַטרעפט $4d$. **באַווייז**: די סומע פון יעדן אינעװײניגסטן װינקל מיט זײַן דרויסנווינקל באַטרעפט $2d$ (94); אַזעלכע פּאָרלאַך זײנען פֿאַראַן אין פּילעק n, זײער סומע באַטרעפט הײסט עס: $n\times 2d$; די סומע פון די אינעװײַניגסטע אַלײן באַטרעפט (לויט ד): $2d(n-2)$, בלײבט אויפן חלק פון אַלע דרויסנווינקלען: $2dn-2d(n-2)=4d$.

באַטראַכטנדיג די סומעס פון די אינעװײַניגסטע װינקלען און פון די דרויסנווינקלען פֿון אַ דרײעק (ב=151) פֿון אַ פירעק (ב=18) און איצט פֿון פּילעק (ה) שליסן מיר, אַז:

ו) **די סומע פֿון די דרויסנווינקלען** פון יעדער גראָדליניגער, געשלאָסענער און פּוקלער פיגור **איז אַ שטענדיגע גרויס** און באַטרעפט $4d$;

ז) **די סומע פֿון די אינעװײניגסטע װינקלען** פון יעדער אַרט פון אַ גראָדליניגער, געשלאָסענער און פּוקלער פיגור **איז אָפּהענגיג פֿון דער צאָל** פון אירע **זײטן**, אָבער ניט פֿון זײער לײנג.

ח) **די צאָל רעכטע װינקלען**, װאָס מאַכט אויס די סומע פון די אינעװײַניגסטע װינקלען פון יעדער גראָדליניגער, געשלאָסענער און פּוקלער פיגור, **איז אַ גראָדע**, װײַל זי אַנטהאַלט דעם כפלער 2.

ט) װאָס אנבאַלאַנגט דער אויפשטעלונג פון אַ פּילעק, איז קלאָר, אַז אַ פּילעק װערט פולקום באַשטימט דורך אַלע דרײעקן, אויף װעלכע ער װערט געשפּאָלטן דורך זײַנע דיאַגאָנאַלעס **פֿון אײן עק**. אײנער פון די דרײַעקן װערט פולקום באַשטימט דורך 3 זײַנע עלעמענטן (א=165), יעדער װײטערדיגער— דורך 2, װײל ער האַט מיטן פֿריערדיגן דרײַעק אַ שותּפֿותדיגן עלעמענט, די דיאַגאָנאַלע, װעלכע איז אויך באַשטימט פון פֿריערדיגן. די צאָל דרײַעקן װעלכע עס בילדן די דיאַגאָנאַלעס פון אײן עק, באַטרעפט $n-2$, אַראָפּ אײנער $n-3$, דאַרפן מיר, הײסט עס, פאַר אַ n-עק $3+2(n-3)$ ד. ה. $2n-3$, עלעמענטן, צװישן װעלכע עס דאַרפן זײַן ניט מער װי $(n-1)$ װינקלען װײַל דער לעצטער װינקל װערט שוין במילא באַשטימט (ד)

אַ n-עק (אָדער זײַן קאָנגרועניץ מיט אַ צװײטן) װערט פּול-

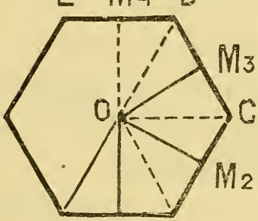
קום באשטימט דורך $(2n-3)$ **עלעמענטן, צווישן וועלכע עס קענען זיין ניט מער ווי** $(n-1)$ **ווינקלען.** אזוי למשל ווערט א פינפעק פולקום באשטימט דורך $(5\times2-3)$, ד. ה. 7 עלעמענטן זיינע.

191. **א** פילעק, וואס אלע זיינע **ווינקלען און זייטן** זיינען גלייך צווישן זיך, הייסט **רעגלמעסיגער** פילעק. (פיג. 52)

א **גלייכזייטיגער דרייעק** איז א **רעגלמעסיגער דרייעק** (153=ה). א **קוואדראט**—א **רעגלמעסיגער פירעק.** פון דעם, וואס מיר האבן געזאגט וועגן פילעקן בכלל און פון דער באשטימונג פון א רעגלמעסיגן פילעק, איז קלאר אז:

א) אין א רעגלמעסיגן פילעק מיט n זייטן באטרעפט יעדער אינעווייניג-סטער ווינקל $\frac{2d(n-2)}{n}$ (190=ד) יעדער דרויסנווינקל—$\frac{4d}{n}$; איצט וועלן מיר באווייזן א נייע אייגנשאפט פון א רעגלמעסיגן פילעק.

ב) די מיטנזיילרעכטע פון צוויי שכנותדיגע זייטן פון א רעגלמעסיגן פילעק שניידן זיך אין א פונקט, וועלכער איז גלייך דערווייטערט פון אלע איבעריגע שפיצפונקטן און זייטן. אט אזא פונקט פון א רעגלמעסיגער פיגור הייסט איר **צענטער** אדער **מיטלפונקט** (O אויף פיג. 51)



פיג. 52.

פאראויסג.: ABCDEFA—א רעגלמע-סיגער פילעק, ד. ה. AB=BC=CD א. א. וו., M_1, M_2, M_3 א. א. וו. די מיטנפונקטן פון זיינע זייטן, ד. ה. $AM_1=M_1B=BM_2=M_2C$ א. א. וו. M_1O און M_2O — צוויי מיטנזיילרעכטע פון זיינע צוויי שכנותדיגע זייטן, וועלכע שניידן זיך אין O; OM_3, OM_4 א. א. וו. זיילרעכטע, אראפגעלאזן פון O אויף די איבעריגע זייטן פון פילעק, OA, OB, OC, OD א. א. וו.—שטרעקעס, וועלכע פארבינדן O מיט זיינע שפיצפונקטן. **פעסטשט.:** 1) $OM_1=OM_2=OM_3=OM_4$ א. א. וו. 2) OA=OB=OC=OD א. א. וו. **באוויין:** M_1O מיט M_2O מוזן זיך שניידן, ווייל ABC איז ניט קיין גראדע; די דרייעקן AOB און BOC זיינען גלייכלענדיגע ווייל OA=OB און OB=OC (117), דערפון שליסן מיר, אז OA=OB=OC (47) און דעריבער זיינען די זעלבע דרייעקן קאנ-גרוענט (163=א); פון דער קאנגרוענץ שליסן מיר אז OA, OB און OC זיינען די ביסעקטריסעס פון די ווינקלען A, B און C פון פילעק, ווייל ∢OAB=OBA=OBC=OCB; פון דער זעלבער קאנגרוענץ מוזן מיר

שליסן, אַז $OM_1=OM_2$; איז OC די ביסעקטריסע פון ווינקל C, דאַן זיינען די רעכטווינקלדיגע דרייעקן OM_3C און OM_2C קאנגרועֶנט (ג=162); פון אָט דער קאָנגרועֶנץ שליסט זיך אַרויס, אַז $CM_2=CM_3$ און $OM_2=OM_3$ (ג=165) און ווייל $BC=CD$ (פאַראויסגעזעצט) איז M_3 דער מיטנפּונקט פון D ; אויב אַזוי איז $OD=OC$, ווייל $OM_3 \perp CD$ און (117); איז $OD=OC$ דאַן איז דער דרייעק OCD אַ גלייכלעֶנדיגער און $\sphericalangle OCD=ODC$ דערפון שליסן מיר ווידער, אַז OD איז די ביסעקטריסע פון ווינקל D, ווייל די ווינקלען D און C זיינען גלייך און (51); איז $OM_1=OM_2$ און $OM_2=OM_3$ דאַן איז $OM_1=OM_2=OM_3$ א. א. וו. איז $DO=OB=OC$ און $OD=OC$ דאַן איז $OA=OB=OC=OD$ א. א. וו. מיטן זעלבן גאַנג וואָלטן מיר געקענט באַהאַנדלען אַלע איבעריגע זייטן פון O ביז די זייטן פון פּיל-עק ווי אויך אַלע שטרעקעס צווישן O מיט די שפּיצפּונקטן.

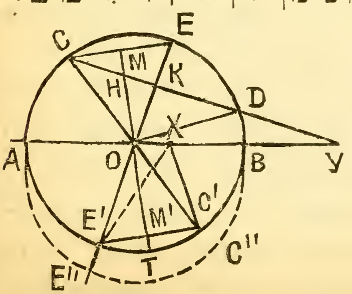
ג) וואָס אנבאַלאַנגט דער אייפשטעלונג פון אַ רעגולמעסיגן פּילעק איז קלאָר, אַז מיר דאַרפן דערצו האָבן ניט מער ווי די צאָל פון זיינע זייטן און די לענג פון איינער פון זיי, ווייל דער ווינקל צווישן די זייטן ווערט שוין באַשטימט פון זייער צאָל (ליט א), ד. ה. **אַ רעגולמעסיגער פּילעק מיט אַ געגעבענער צאָל זייטן (אָדער זיין קאָנגרועֶנץ מיט אַ צווייטן) ווערט פולקום באַשטימט דורך איין ליניאַלן עלעמענט.**

קאַפּיטל ז.

אומקרייז

192. ביז איצט האָבן מיר באַהאַנדלט די אייגנשאַפטן פון גראַדליניגע פיגורן. איצט וועלן מיר באַטראַכטן די איינפאַכסטע קרומע ליניע — דעם **אומקרייז** (פיג. 53).

באַשטימונגען: א) אַ פלאַכע (61) קרומע (67) געשלאָסענע ליניע וואָס אַלע איר(ע) פּונקטן זיינען גלייך דערווייטערט פון איין פּונקט, איר **מיטל-פּונקט** אָדער **צענטער** הייסט **אומ-קרייז** (ג=121); דער טייל פון דער פלאַכע, (12) וואָס ווערט באַגרעניצט דורכן אומקרייז הייסט **קרייז**.



פּיג. 53

ב) די שטרעקע (למשל OA ,OC′ א. א. וו. צווישן אַ וועלכן עס איז

פונקט פון אומקרייז און זיין צענטער הייסט **שטראל** אדער **ראדיוס** פון אומקרייז אדער פון קרייז.

ג) **א** שטרעקע (CD, CE למשל), וועלכע פארבינדט צוויי וועלכע עס איז פונקטן (C מיט E) פון אומקרייז, הייסט **סטרונע** אדער אויף גריכיש **כארדע**; א כארדע (למשל AB, C'E' א. א. וו.) וואס ציהט זיך דורכן צענטער הייסט **דיאמעטער**, וואס באדייט **דורכמעסטער**, ווייל דורך אזא כארדע ווערט באשטימט (דורכגעמאסטן) דער קרייז אדער אומקרייז.

ד) **א** טייל פון אומקרייז הייסט **בויגן** און ווערט קורץ באצייכנט דורכן סימן ⌣, למשל ⌣C'TE' (פיג. 53, אונטן). וועגן א כארדע מיט איר בויגן זאגן מיר: **די כארדע שפאנט דעם בויגן** אדער פארקערט: דער בויגן שפאנט די כארדע. אייגנטלאך שפאנט איין און דיזעלבע כארדע למשל C'E' צוויי בויגנס, וועלכע זיינען אפטמאל פארשיידן לאנג: ⌣C'TE' און ⌣E'ACEBC', שטענדיג אבער באטראכט מען דעם קלענערן בויגן אלס **געהעריג** צו דער כארדע.

ה) **א** טייל פון קרייז (למשל C'M'E'T) וועלכער איז באגרענעצט דורך א כארדע און איר בויגן הייסט **קרייזאפשניט** אדער **סעגמענט**; א טייל פון קרייז (למשל C'OE'T), וועלכע איז באגרענעצט דורך צוויי ראדיוסן מיטן בויגן צווישן זיי, הייסט **קרייזאויסשניט**, אדער **סעקטאר**.

ו) **דער** ווינקל צווישן צוויי ראדיוסן (למשל C'OE') הייסט **צענטערווינקל**.

ז) **צוויי** אומקרייזן וואס האבן א שותפותדיגן צענטער, הייסן **קאנצענטרישע אומקרייזן** (פיג. 10 זייטל 15).

193. פון (192) מאכן מיר א גאנצע רייע נייע שליסן בנוגע דעם אומקרייז:

א) **פון** (192=א): **אלע ראדיוסן פון** איין און דעמזעלבן **אומקרייז זיינען גלייך לאנג.** די לענג פון דיאמעטער באטרעפט די סומע פון צוויי ראדיוסן און דעריבער זיינען **אלע דיאמעטערס פון** איין און דעמזעלבן **אומקרייז גלייך צווישן זיך. צוויי ראדיוסן און די כארדע** צווישן זייערע ענדפונקטן **בילדן א גלייכשענקליגן דרייעק** (COE)

ב) דער צענטער פון אומקרייז איז דער מיטנפונקט פון יעדן דיאמעטער זיינעם. דערפון ווידער שליסט זיך אז **יעדער אומקרייז פארמעגט ניט מער ווי איין צענטער**, ווען ניט וואלט דער דיאמעטער דורך ביידע צענטערס געהאט צוויי מיטנפונקטן און דאס איז אבסורד!

ג) די שטרעקע צווישן יעדן פונקט, (למשל X) וואס ליגט אין דעם קרייז, און דעם צענטער איז קלענער פון ראדיוס, ווייל $OX < OB$ (46); די שטרע-

קע צווישן יעדן פונקט (למשל Y), וואָס ליגט אויסער דעם קרייז און דעם צענטער איז גרעסער פון ראַדיוס, ווייל $OB < 0Y$ (46); פאַרקערט:

ג*) איז די שטרעקע צווישן אַ פונקט און דעם צענטער פון אַ קרייז קלענער פון ראַדיוס פון דאָזיגן קרייז, דאַן ליגט דער פונקט אין דעם קרייז; איז די אויבנדערמאָנטע שטרעקע גרעסער פון ראַדיוס, דאַן ליגט דער דאָזיגער פונקט אויסערן קרייז, ווייל דער פונקט קען פאַרנעמען בנוגע דעם קרייז נאָר דרײַ פאַר אונז דײַנקבאַרע לאַגעס: ער קען ליגן ענטוועדער **אין דעם קרייז** אָדער **אויפן אומקרייז גופא**, אָדער **אויסערן קרייז** און יעדע לאַגע קען באַווייזן ווערן דורכן אויסשליסן (155) די מעגלאַכע איבעריגע צוויי. עס איז אויך קלאָר, אַז אויב אַ פונקט איז דערווייטערט פון צענטער אויף אַ שטרעקע גלייך דעם ראַדיוס, דאַן ליגט ער אויפן אומקרייז.

ד) **דער דיאַמעטער איז גרעסער פון יעדער באַליביגער קאָרדע.** פון דרייעק, למשל COD, שליסן מיר: $CD < C0+0D$ (148) אָבער $C0+0D = AB$ (**א**), דעריבער: $AB > CD$ (52);

ה) פון אַלע שטרעקעס, וועלכע פאַרבינדן אַ וועלכן עס איז פונקט, וואָס ליגט אין דעם קרייז (למשל X), אָדער אויסער אים (למשל Y) מיט פונקטן פון אומקרייז איז: I) די גרעסטע יענע, וועלכע ציהט זיך דורכן צענטער (XA און YA) II) די קלענסטע יענע, וואָס די **פאַרלענגערונג** אירע ציהט זיך דורכן צענטער (XB און YB); III) ציהען זיך די שטרעקעס ניט דורך דעם צענטער, דאַן איז יענע גרעסער, וועלכע ליגט אַנטקעגן אַ גרעסערן **צענטערווינקל; באַווייז:** I) פון 3-עק $C0Y$: $CY < C0+0Y$ (148) $C0=A0$; $CY < A0+0Y$, $CY < AY$ (52); פון 3-עק $X0E'$: $XE' < X0+0E'$, $0E'=A0$, $XE' < X0+0A$, $XE' < XA$ (52); II) פון 3-עק $0DY$: $0Y < 0D+DY$, $0Y=0B+BY$, $0B=0D$, $0B+BY < 0D+DY$, $BY < DY$ (56); פון 3-עק $0XC'$: $XC' > 0C'-0X$ (148), $0C'=0B$, $XC' > 0B-0X$; $XC' > XB$; III) פון די 3-עקן $C0Y$ און $E0Y$, וועלכע שטימען איין אין צוויי זײַטן (דער שותפותדיגער $0Y$ און $0C=0E$) אַנטקעגן וועלכע עס ליגן אָבער אומגלייכע צענטערווינקלען $\angle C0Y > E0Y$ דרינגען מיר ארויס, אַז $CY > EY$ (166) מיטן זעלבן געדאַנקענגאַנג דרינגען מיר אַרויס פון די 3עקן $X0C'$ און $X0E'$ אַז $XC' > XE'$.

ו) יעדער דיאַמעטער שפּאַלט דעם קרייז און אומקרייז אויף דער העלפט, אָדער: **דער קרייז און זיין אומקרייז** ווערן געשפּאָלטן פון יעדן פון זײַערע דיאַמעטערס אין צוויי טיילן, וועלכע זײַנען **סימעטריש** (108) **צום**

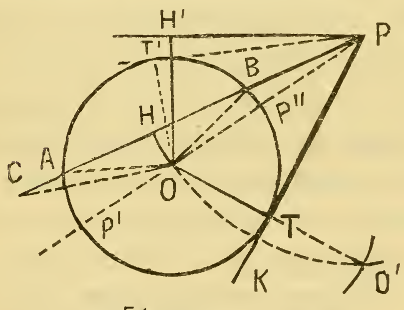
דאָזיִנן **דיאַמעטער**. דאָס קען לײַכט באַוויזן ווערן, אומקנײַטשנדיג דעם קרײַז אַרום אַ וועלכן עס איז דיאַמעטער זײַנעם: למשל AB: ווען זיך די העלפטן דערבײַ ניט דעקן, דאַן וועט אויסקומען בשעת דער טײַל ACEB וועט בײַם אומקנײַטשן פאַרנעמען למשל די לאַגע AE″C″B, אַז OE′=OE″ אַלס ראַדיוסן פון אײַן און דעמזעלבן אימקרײַז; דאָס איז אָבער אַבסורד! (46) בלײַבט אַז די העלפטן מוזן זיך דעקן בײַם אומקנײַטשן.

ו) דורכן זעלבן באַווײַז ווי אין (ו) קען מען אַרויסדרינגען, אַז **אומקרײַזן מיט גלײַך לאַנגע ראַדיוסן** (דיאַמעטערס) **זײַנען דעקיג** (גלײַך), און

ה) צוויי בויגנס פון אײַן און דעמזעלבן אומקרייז, אָדער פון צוויי קאָנגרוענטע (גלײַכע) אומקרײַזן קענען שטענדיג צונויפגעגאָסן ווערן אין אײנעם, דרײַענדיג זיי אַרום צענטער.

.194 די פאלגנדיגע זאצן באהאנדלען די לאגעס פון א גראדער בנוגע אן אומקרייז (פיג. 54)

א) **באשטימונג**: א גראדע, וועלכע האט מיט אן אומקרייז איין שיתפותדיגן פונקט, באַרירט דעם אומקרייז אין איין פונקט, הייסט **באַרירליניע** אדער אויף לאטײַניש **טאַנגענטע** צום אומקרײַז. די גראדע PT למשל איז א טאַנגענטע צום אומקרייז.



פיג. 54.

ב) **באשטימונג**: א גראדע וועלכע האָט מיט אן אומקרייז מער ווי איין שיתפותדיגן פונקט, הײַסט **שנײַדליניע** אדער **סעקאַנטע** ווי למשל די גראדע PA. וואס אנבאלאנגט דער צאל פונקטן, וואס א גראדע קען האבן שיתפותדיג מיט אן אומקרײַז, גילט אזא זאץ:

ג) **אַ גראַדע (סעקאַנטע) קען האָבן מיט אן אומקרײַז ניט מער ווי צוויי שותפותדיגע פונקטן ד. ה. קען שנײַדן דעם אומקרײַז ניט מער ווי אין צוויי פונקטן.**

באַווײַז. די גראדע PA האָט מיטן אימקרײַז שיתפותדיג צוויי פונקטן A און B; פעסטשטעלט. מער ווי די צוויי פונקטן קען זי שותפית־דיג מיטן אומקרײַז ניט האבן, ד. ה. אלע איבעריגע פונקטן (אויסער A און B) פון דער גראדער ליגן ניט אויפן אומקרײַז; הילפליניע – HO⊥AB באַווײַז: (דורכן היפוך) פון גלײַכלעכנדיגן (193=א) דרײַעק ACB איז קלאָר

אז די פונקטן, וואס ליגן צווישן A און B זײַנען דערווײַטערט פון O אויף א שטרעקע וואס איז **קלענער** פון ראדיוס (170-ב), ליגן אין דעם קרייז און קענען אויפן אומקרייז ניט ליגן. לאמיר אננעמען, אז דער פונקט C וואס ליגט ווײַטער פון A (ד.ה. $CH > AH$) ליגט אויפן אומקרייז און בילדעט דעם דריטן שותפותדיגן פונקט; פון דער השערה מוזן מיר שליסן, אז $CO=AC$ (גלײַכע ראדיוסן) דאס איז אבער אבסורד; $CO < A0$ (172-ב) בלײַבט, הייסט עס, אז פונקט C ווי יעדער אנדערער אויסער A און B, ליגט אויפן אומקרייז.

ד) פון (א) לאזט זיך לײַכט ארויסדרינגען אזא זאץ (פיג. 54)

א ווײַלרעכטע (PT) צו א ראדיוס (0T) אין זײַן ענדעפונקט (T) אויפן אומקרייז איז א טאנגענטע צום זעלבן אומקרייז אין דאזיגן פונקט ווייל 0T איז די קירצסטע שטרעקע צווישן 0 און PT (א=115) און יעדע אנדערע שטרעקע (0K למשל) איז לייגנער פון PT און דעריבער ליגט יעדער אנדער פונקט (אויסער T) פון דער גראדער PT אויסערן קרייז (193-ג) ד.ה. T איז דער איינציגער פונקט פון דער גרא-דער PT, וואס ליגט אויפן אומקרייז, אנדערש געזאגט PT איז א טענגאנטע.

ה) (נעגאטיוו צו ד): **א גראדע וואס איז גענייגט** (ניט ווײַלרעכט **צום ראדיום אין זײַן ענדעפונקט אויפן אומקרייז, איז** ניט קיין טאנגענטע, נאר **א סעקאנטע** (פיג. 54); פאראויסג.: PA בילדעט מיטן ראדיום 0B ניט קיין רעכטן ווינקל (0BA); פעסטשטעלונג: PA איז א סעקאנטע ד.ה. זי האט מיטן אומקרייז צוויי שותפותדיגע פונקטן (A און B) הילפליניע: $PA \perp 0H$; באווייז: פון 0 קען מען אראפלאזן נאך א גענייגטע (0A) אזוי, אז $0A=AB$ (115-ג) און דאן ליגט אויך A אויפן אומקרייז (193-ג*) און PA האט מיטן אומקרייז צוויי שותפותדיגע פונקטן (A און B) ד.ה. איז א סעקאנטע

ו) (פארקערט פון ד): **א טאנגענטע שטייט ווײַלרעכט צום רא-דיוס אין דעם בארירפונקט.**

פאראויסג.: PT=א טאנגענטע צום אומקרייז אין פונקט T;

פעסטשט. $PT \perp 0T$; באווייז: ערשטער — ווען ניט וואלט PT געווען (לויט ה) א סעקאנטע און דאס וואלט סותר געווען דעם פאראויסג.; צווייטער: PT האט מיטן אומקרייז שותפותדיג דעם איינציגן פונקט T, אלע איבעריגע פונקטן אירע ליגן אויסערן קרייז, און ווײַטערע שטרעקעס ביזן צענטער זײַנען לייגנער פון OT, וועלכע איז, אויב אזוי, דער קירצסטער מרחק (116=באשט) צווישן 0 און PT, און דעריבער (115=ב) איז $PT \perp 0T$; פון (ו) שליסן מיר:

ז) **א ווײַלרעכטע צו א טאנגענטע אין בארירפונקט גייט דורכן צענטער**, ווען ניט, וואלט אן אנדער ראדיוס פון צענטער צום

באַריִרפּונקט אויך געווען זײַלרעכט צו דער טאַנגענטע אין דעם דאָזיגן פּונקט (לויט ו) און דאָס וואָלט סותר געווען (90)

ח) **א זײַלרעכטע פון צענטער צו אַ טאַנגענטע טרעפט די דאָזיגע טאַנגענטע אין באַריִרפּונקט**, ווען ניט וועלן מיר מיטן געדאַנקענגאַנג ווי אין (ז) קומען צו אַ סתירה מיט (115).

ט) **אין יעדן פּונקט פון אַן אומקרייז קען מען ציִען אַ טאַנגענטע צו אים און ניט מער ווי איינע.** ציִענדיק דורכן געוואונשענעם באַריִרפּונקט אַ ראַדיוס און, אוועקשטעלנדיק אַ זײַלרעכטע צו אים אין זעלבן פּונקט וועלן מיר באַקומען די טאַנגענטע (ד) און (90.)

י) **איז** דער מרחק (OH) צווישן צענטער און אַ גראַדער **קלענער פון ראַדיוס**, דאַן איז די דאָזיגע גראַדע (PA) אַ **סעקאַנטע**, איז דער דאָזיגער מרחק (OH′) גרעסער פון ראַדיוס, דאַן האָט די גראַדע (PH′) מיטן אומקרייז קיין שום שותפותדיקן פּונקט, איז דער דאָזיגער מרחק (OT) **גלייך דעם ראַדיוס**, דאַן איז די גראַדע (PT) **אַ טאַנגענטע. באַווייז:** איז דער ראַדיוס לענגער פון דאָזיגן מרחק, דאַן הייסט עס, אַז דער ראַדיוס איז גענייגט צו דער גראַדע און (ה); איז דער ראַדיוס קירצער פון דעם מרחק, דאַן הייסט עס אַז אפילו, דער נאָענטסטער פּונקט פון דער גראַדער (דער פוספּונקט פון דער זײַלרעכטער) ליגט אויסערן קרייז, און די איבעריקע אודאי. דער דריטער פאַל לאָזט זיך באַווײַזן דורכן אויסשליסן די ערשטע צוויי, ווײַל אַ גראַדע קען בנוגע דעם אומקרייז (אויף דער זעלבער פלאַטע) פאַרנעמען נאָר איינע פון די דרײַ אויסגערעכנטע לאַגעס, אַ פערטע שטעלן מיר זיך ניט פאָר.

יא) **אויפגאַבע: פון אַ געגעבענעם פּונקט, וואָס ליגט אויסער דעם אומקרייז, ציִען אַ טאַנגענטע צו אים** (פיג. 54.) **געגעבן:** דער פּונקט P און דער אומקרייז O; **אויפגאַבע:** ציִען דורך P אַ טאַנגענטע צום דאָזיגן אומקרייז. **אַנאַליז:** זאָל PT זײַן די געזוכטע טאַנגענטע אין פּונקט T; ציִענדיק די גראָדע OT און פאַרלענגערנדיק זי אויף דער שטרעקע TO′ אַזוי, אַז TO=TO′ און פאַרבינדנדיק O′ מיט P וועלן מיר זיך איבערצייגן, אַז PO=PO′ ווײַל PT⊥OO′ (ו) און (170א) דער 3עק OPO′ איז אַ גלײַכלענדיגער און קען לײַכט אויפגעשטעלט ווערן פון (ז=ז), ווײַל PO=PO′ איז אונז געגעבן און OO′ באַטרעפט די סומע פון צוויי ראַדיוסן, ד. ה. גלייך דעם דיאַמעטער פון געגעבענעם קרייז. **אויפשטעלונג:** אַרום P ציִען מיר אַן אומקרייז מיטן ראַדיוס PO, אַרום O מיט אַ ראַדיוס וואָס זאָל גלייך זײַן דעם דיאַמעטער פון געגעבענעם אומקרייז; ביידע בויגנס וועלן זיך שנײַדן אין פּונקט O′; די גראָדע OO′ וועט שנײַדן דעם אומקרייז אין באַ-

ריִרפּונקט T, פאַרבינדנדיג T מיט P וועלן מיר באַקומען די טאַנגענטע PT
באַוויז: די 3עקן $PT0$ און $PT0'$ זײַנען קאָנגרוענט (ז=ז=ז) און ווײַל
(ג=165) איז $\sphericalangle PT0 = PT0'$, ווײַל אָבער זיי זײַנען שטרעקווינקלען ($0'0$—
אַ גראָדע ג=89) איז יעדער פון זיי אַ רעכטער און (ד=194). **באַמערקונג**
די ליינג פון דער טאַנגענטע ווערט גערעכנט פון אַרויסגאַנגספּונקט (P) ביז
באַריִרפּונקט (T). די גראָדע PP' (וואָס איר לאַגע איז באַשטימט דורך P
און 0) איז די סימעטריאַקס פון אומקרײַז (ז=193), אומקנײַטשנדיג די פיגור
אַרום PP' וועלן מיר באַקומען פּונקט T' דעם סימעטרישן מיט T צו דער
אַקס און PT' די סימעטרישע מיט PT, וועט אויך זײַן אַ טאַנגענטע צום
זעלבן אומקרײַז, ווײַל T' ליגט אויפן אומקרײַז און $PT'0 = PT0$ (ב=122)
און (ד=194), פון (ב=110), (ב-ג=111) שליסן מיר:

יב) פון יעדן פּונקט, וואָס ליגט אויסער דעם אומקרײַז קען מען ציִען צוויי טאַנגענטעס צו אים, (ה=118) וועלכע זײַנען גלײַך לאַנג און בילדן גלײַכע ווינקלען, מיט דער גראָדער וואָס פאַרבינדט דעם פּונקט מיטן צענטער. האָבנדיג פון איין פּונקט צוויי טאַנגענטעס צו אַן אומקרײַז, קען לײַכט באַוויזן ווערן דורכן היפוך, מיט אַ סתירה צו (46), אַז די גראָד ; ($P0$), וועלכע פאַרבינדט דעם צענטער פון אומקרײַז (0) מיטן שניטפּונקט (P) פון צוויי טאַנגענטעס זײַנע, טײַלט דעם ווינקל צווישן די דאָזיגע טאַנגענטעס ($T'PT$) אויף דער העלפט.

195. **איצט** לאָמיר באַטראַכטן די שײַכותן צווישן כאָרדעס, זייערע צענטערווינקלען, בויגנס און מרחקים פון צענטער (פיג. 53).

א) גלײַכע בויגנס שפּאַנען גלײַכע כאָרדעס מיט גלײַכע אַנטקעגנדיגע צענטערווינקלען.
פאַראויסב.: $\smile CE = \smile C'E'$; **פעסטשטעל.**: 1) $CE = C'E'$,
2) $\sphericalangle C0E = C'0E'$; **באַוויז**: מיר שטעלן זיך פאָר דעם סעקטאָר $C'0E'$
געדרייט אַרום פּונקט 0 ביז די פּונקטן C' און E' וועלן דעקן די פּונקטן
C און E, ווײַל די בויגנס זײַנען גלײַך און געהערן צום זעלבן אומקרײַז. און
דאַן וועט אויך $C'E'$ דעקן CE; אַזוי ווי דער צענטער 0 בלײַבט אויפן אָרט
וועלן זיך די ראַדיוסן $C'0$ מיט $C0$ און $E'0$ מיט $E0$ אויך דעקן און די
צענטערווינקלען וועלן זײַן גלײַך (83); פאַרקערט:

ב) גלײַכע צענטערווינקלען מיט זייערע גלײַכע כאָרדעס שפּאַנען אַנטקעגנדיגע גלײַכע בויגנס. אַז גלײַכע צענטערווינקלען האָבן אַנטקעגנדיגע גלײַכע כאָרדעס איז קלאָר פון (א=193) (ב=163) און

(161=ב) בײם דרײען דעם סעקטאר $C'OE'$ ארום צענטער וועלן זיך די גלײַכלענדיגע 3-עקן $E'OC'$ און EOC דעקן און דאַן מוזן זיך די בויגנס צווישן זײערע גרונדשפּיצן אויך דעקן (193=ה) און זײַן גלײַך.

ג) (נעגאט. צו **א**) **אומגלײַכע בויגנס שפּאַנען אומגלייכע כאָרדעס מיט אומגלײַכע אנטקעגנדיגע צענטערווינקלען אזוי, אז אנטקעגן דעם גרעסערן בויגן ליגט א גרעסערער צענטערווינקל מיט א לײַנגערער כאָרדע.**

פאראויסב.: $\smile E'C' > \smile CD$; **פעסטשט.:** 1) $\angle E'OC' > \angle COD$ און 2) $E'C' > CD$;

באווייז: מיר דרײען דעם סעקטאר $E'OC'$ ארום צענטער ביז OC' וועט קומען אין דער לאגע פון OC; לויטן פאראויסב. מוז E' פאַרנעמען די לאַגע E צווישן C און D; דערפון ווערט קלאָר, אַז $\angle EOC = E'OC'$ (**א**) און ווײַל OE ליגט צווישן OC און OD איז $\angle COD < \angle COE$; דערפון שליסן מיר באטראַכטנדיג די 3-עקן COE און COD, אז $CE > CD$ אָדער, ווייל (52) $C'E' > CD$ (166=**א**).

ד) (נעגאט. צו **ב**) **אנטקעגן אומגלײַכע צענטערווינקלען ליגן אומגלייכע כאָרדעס מיט אומגלײַכע בויגנס** אזוי, אז אנטקעגן דעם גרעסערן צענטערווינקל ליגט דער גרעסערער בויגן.

פאראויסב.: $\angle E'OC' > COD$; **פעסט.:** 1) $E'C' > CD$, 2) $\smile F'C' > \smile CD$; **באווײַז:** מיר דרײען דעם סעקטאר $E'OC'$ ביז ער קומט אין דער לאגע COE; OE' מוז לויטן פאראויסבאדונג פארנעמען די לאַגע OE און פון די 3-עקן COD און COE ווערט קלאָר, אַז $CE > CD$ אָדער (52) $CE > CD$ (166=**א**). וואָס אנבאלאַנגט די בויגנס CE, און CD קען CD ניט זיין קלענער אָדער גלייַך צו CE (אָדער $C'E'$(52)), ווייל דאַמאָלסט וואָלט געווען ווינקל COD קלענער אָדער גלײַך צום ווינקל EOC ($52, C'OE'$) און דאָס וואָלט סותר געווען דעם פאַראויסבאדונג.

ה) **א ווײַלרעכטע פון צענטער אויף א כאָרדע טײלט די דאָזיגע כאָרדע, איר געהעריגן בויגן און צענטערווינקל אויף דער העלפט. פאָראויסב.:** $C'E' \perp OM'$; **פעסטשט.:** 1) $M'E' = C'M'$, 2) $\smile TC' = \smile E'T$, 3) $\angle M'OC' = E'OM'$; **באווײַז:** אזוי ווי דער 3-עק $E'OC'$ איז א גלײַכלענדיגער, ווערט ער געשפּאָלטן פון זײַן הויכליניע OM' אין צוויי קאָנגרועַנטע רעכטווינקלדיגע 3-עקן (164: שלוס.) פון (165=ג) שליסן מיר, אַז $M'C' = E'M'$ און $\angle M'OC' = E'OM'$, דערפון ווידער ווערט שוין קלאָר, אַז $\smile TC' = \smile E'T$ (**ב**)

דער זאַץ (ה) איז א צוזאַמענגעזעצטער (41), דעריבער קען מען פון

אים מאַכן עטלאַכע פּאַרקערטע:

ה[1]) די מיטנזײַלרעכטע צו אַ כאָרדע גייט דורך דעם צענטער (ג=153.)

ה[2]) אַ גראָדע, וואָס פאַבינדט דעם מיטנפּונקט פון אַ כאָרדע מיטן צענטער, שטייט זײַלרעכט צו דער כאָרדע און טיילט איר געהעריגן בויגן און צענטערווינקל אויף דער העלפט

פּאַראויסב.: $E'M' = MC'$; פעסטשטעל.: 1) $OM' \perp E'C'$, 2) $\smile E'T = \smile TC'$ 3) $E'OM' = M'OC'$; באַווײַז: די 3-עקן $E'OM'$ און $M'OC'$ זיינען קאָנ-גרועַנט (ז=ז), דערפון (ג=165) שליסן מיר אַז $\angle OM'E' = OM'C' = d$ (ד=89) ווײַטער גייט דער באווייז ווי אין (ה)

ה[3]) אַ גראָדע וואָס ציהט זיך דורך די מיטנפּונקטן פון אַ בויגן און זײַן כאָרדע, גייט דורכן מיטנפּונקט; (ה) און (69)

ה[4]) אַ גראָדע, וואָס ציהט זיך דורכן צענטער און דעם מיטנפּונקט פון אַ בויגן, איז די מיטנזײַלרעכטע פון דער געהעריגער כאַרדע (ה) און 69;

ו) אויפגאַבע: טיילן אַ געגעבענעם בויגן אויף דער העלפט. לייזונג: אָנצייכענען די געהעריגע כאָרדע און אויעקשטעלן צו איר אַ מיטנזײַלרעכטע (118=ב), וועלכע וועט שניידן דעם בויגן אין געזוכטן פונקט.

ז) אויפגאַבע: געגעבן איז אַן אומכרײַזבויגן. געפינען זײַן צענטער. לייזונג: ציהען וועלכע עס איז צוויי כאָרדעס (נאָר ניט פּאַראַלעלע), וואָס זייערע ענדעפּונקטן זאָלן ליגן אויפן געגעבענעם בויגן און אויפשטעלן די מיטנזײלרעכטע פון די דאָזיגע כאָרדעס. דער שניטפּונקט פון די מיטנזײַלרעכטע איז דער געזוכטער צענטער(ה[1],71,72).

ח) פון דער אויפשטעלונג (ז) שליסן מיר, אַז די מיטנ-זײַלרעכטע צו אַ געגעבענער שטרעקע איז דער געאָמעטרי-שער אָרט (121) פון די צענטערס פון אומכרײַזן, וועלכע גייען דורך די ענדעפּונקטן פון דער דאָזיגער שטרעקע. (ה=I)

ט) גלייך לאַנגע כאָרדעס זיינען גלייך דערווײַטערט (116=באַשט.) פון צענטער. (פיג. 53) פּאַראויסב.: $CE = C'E'$ פעסטשטעל: $OM \perp CE$, $OM' \perp C'E'$; $OM = OM'$; באַווייז: M און M' זײַנען די מיטפּונקטן פון די כאָרדעס CE און $C'E'$ (ה); בײַם צונויפ־לייגן די 3-עקן COE מיט $C'OE'$ דורכן דרייען זיי אַרום O, וועלן זיך

די פּונקטן M און M' דעקן און אַזוי ווי O בלײַבט אויפֿן אָרט, וועט אויס־קומען, אַז $OM = OM'$ (74)

י) (פאַרקערט צו ט): **כאָרדעס, וואָס זײַנען גלײַך דערווײַטערט פֿון צענטער, זײַנען גלײַך לאַנג** פֿאַראויסב.: $OM — OM'$ (זעה ט); פֿעסטשט.: $CE = C'E'$; באַווײַז: די רעכטווינקלדיקע 3־עקן COM און $E'OM'$ זײַנען קאָנגרוענט (164=שלוס.) און דעריבער (165=ג) איז $CM = E'M'$, ווײַל אָבער (ה) און (50) איז $CE = C'E'$

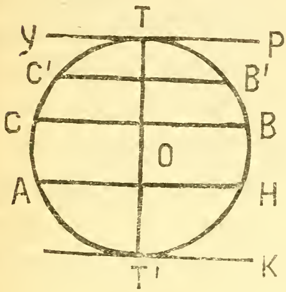
יא) אומגלײַכע כאָרדעס זײַנען אומגלײַך דערווײַטערט פֿון צענטער אַזוי, אַז די קלענערע כאָרדע איז ווײַטער פֿון אים. (פֿיג. 53) פֿאַראויסב.: $CD > C'E'$, $OK \perp CD$, $OM' \perp C'E'$; פֿעסטשט.: $M' > OK$; באַווײַז: מיר ברענגען דעם דרײַעק $E'OC'$ אין דער לאַגע EOC; (אויף דער צייכנונג דעקן זיך צופֿעליק OK מיט OE) עס איז קלאָר פֿון (ט) אַז $OM = OM'$; פֿון רעכטווינקלדיקן דרײַעק OKH האָבן מיר $OH > OK$ (156=א); ווײַטער $CM > OH$ (46), און דעריבער איז $OM > OK$ (48) און אויך $OM' > OK$ (52)

יב) (פאַרקערט צו יא) **כאָרדעס, וואָס זײַנען אומגלײַך דערווײַטערט פֿון צענטער, זײַנען אומגלײַך** אַזוי, אַז די מער דערווײַטערטע איז קלענער. פֿאַראויסב.: $OM' > OK$ (זעה יא); פֿעסטשט.: $CD > E'C'$; באַווײַז: $E'C'$ קען ניט זײַן סײַ גלײַך, סײַ גרעסער פֿון CD: ווײַל דאַמאָלסט וואָלט לויט (ט) און (יא) געדאַרפֿט זײַן OM' אָדער גלײַך אָדער קלענער פֿון OK; ביידע פֿאַלן זײַנען סותר אונזער פֿאַראויסבאַדונג און מוזן אָפּגעוואָרפֿן ווערן; בלײַבט די איינציקע געבליבענע דריטע שײַכות $E'C' > CD$

יג) פֿון אַלע כאָרדעס, וואָס ציִען זיך דורך אַ געגעבענעם פּונקט אין דעם קרײַז, איז די קלענסטע, יענע וועלכע שטייט זײַלרעכט (פּערפּענדיקולאַר) **צום ראַדיוס דורך דעם דאָזיקן פּונקט** דאָס איז אַ שלוסזאַץ פֿון דעם ערשט באַוויזענעם (יב), ווײַל בנוגע צו אַלע איבעריקע (ניט פּערפּענדיקולאַרע) כאָרדעס וועט דער אויבנדערמאָנטער ראַדיוס זײַן אַ געניגטע, וועלכע איז לענגער פֿון דער זײַל־רעכטער און (יב).

יד) בויגנס פֿון איין און דעמזעלבן אומקרײַז, וואָס ליגן צווישן פּאַראַלעלע כאָרדעס, אָדער צווישן פּאַראַלעלע טאַנגענטעס, אָדער צווישן אַ כאָרדע מיט אַ פּאַראַלעלער טאַנגענטע—זײַנען גלײַך. (פֿיג. 55

פּאָראויסגב.: $T'K \| AH \| CB \| C'B' \| YP$; **פּעסטשטעל.:** 1) $\smile CC'=BB'$ אָדער $\smile AC=HB$; 2) $\smile TAT'=THT'$; 3) $\smile C'T=TB'$; **באַווייז:** פאַרבינדנדיג דעם צענטער O מיטן באַרירפּונקט T און פאַרלײנגערנדיג TO אין אַנטקעגנדיגער ריכטונג, וועלן מיר באַקומען, אַז דער דיאַמעטער TOT' שטייט ווילרעכט צו YP (ו) און בּמילא צו אַלע באַרדעס, וואָס ציהען זיך אין קרייז (139־**א**), טיילט זיי אַלע אויף דער העלפט (ה) און טרעפט די טאַנגענטע T'K אין איר באַרירפּונקט (194־ח); דערפון איז שוין קלאָר, אַז $\smile C'T=TB'$ און $\smile CT=TB$, לויט (51) איז: $\smile CT-C'T=TB-TB'$, אָדער $\smile CC'=BB'$; אויפן זעלבן שטייגער קען באַווייזן ווערן, אַז $\smile AC=HB$, באַהאַנדלענדיג די בויגנס AT, TH, CT און CB; פון דעם וואָס TOT' איז אַ דיאַמעטער ווערט קלאָר, אַז $\smile TAT'=TBT'$ (193־ו)



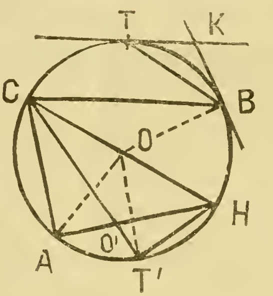
פיג. 55

טו) (פאַרק. צו יד) זיינען צוויי בויגנס פון איין און דעמזעלבן אומקרייז, וואָס ליגן צווישן צוויי באַרדעס (וועלכע שניידן זיך ניט אין קרייז), **גלייך צווישן זיך, אָדער די בויגנס צווישן אַ באַרדע מיט אַ טאַנגענטע גלייך צווישן זיך, אָדער די בויגנס צווישן צוויי טאַנגענטעס גלייך צווישן זיך,—דאַן זיינען די גראַדע אין יעדער דערמאָנטער פּאָר פּאַראַלעל צווישן זיך.** **פּאָראויסגב.:** 1) $\smile AC=HB$, 2) $\smile CT=TB$, 3) $\smile T'AT=T'HT$ (YP און T'K—טאַנגענטעס) **פּעסטשטעל.:** 1) $AH \| CB$ 2) $YP \| CB$, 3) $YP \| T'K$; **באַווייז:** אַראָפּלאָזנדיג אויף CB די ווילרעכטע OT און פאַרלײנגערנדיג זי אין אַנטקעגנדיגער ריכטונג וועלן מיר זיך איבערציינגן, אַז $\smile CT=TB$ (ה); פון (50) ווייסן מיר, אַז $\smile AC+CT=HB+BT$, אָדער (52) $\smile AT=TH$ ד. ה. TOT' שטייט ווילרעכט אויך צו AH (ה[4]) אויב אַזוי, איז $AH \| CB$ (129־**ב**); אויפן זעלבן שטייגער קענען באַוויזן ווערן די איבעריגע זאַצן פון דער פּעסטשטעלונג.

טז) שלוסזאַץ: דער באַרירפּונקט פון אַ טאַנגענטע, וואָס איז פּאַראַלעל צו אַ באַרדע, טיילט דעם געהעריגן בויגן פון דער באַרדע אויף דער העלפט, ווייל דער ראַדיוס צום באַרירפּונקט שטייט ווילרעכט צו דער טאַנגענטע (194־ו) און דעריבער אויך צו דער באַרדע (139־**א**) און (ה).

196. **א**יצט וועלן מיר באַטראַכטן עטלאַכע אַרטן ווינקלען, וואָס זייערע זייטן בילדן כאָרדעס, טאַנגענטעס, אָדער סעקאַנטעס פון אומקרייז, און די שייכות צווישן די דאָזיגע ווינקלען מיט באַשטימטע צענטערווינקלען פון זעלבן אומקרייז.

א) באַשטימונג: אַ ווינקל, וואָס זיין שפּיצפּונקט ליגט אויפן אומקרייז, הייסט **אומקרייזווינקל**. דער בויגן און זיין כאָרדע, וואָס ליגן צווישן די זייטן פון אומקרייזווינקל, הייסן **געהעריג** צו אים; דאָסזעלבע דער צענטערווינקל, וואָס שטיצט זיך אויפן זעלבן בויגן ווי דער אומקרייזווינקל. צווישן יעדן אומקרייזווינקל און זיין געהעריגן צענטערווינקל איז פאַראַן אַ באַשטימטע שייכות, וועלכע ווערט אויסגעדריקט אין אַזאַ זאַץ:



פיג. 56

ב) אַן אומקרייזווינקל באַטרעפט די העלפט פון זיין געהעריגן צענטערווינקל. לאָמיר עס באַווייזן איינציגווייז בנוגע צו אַלע אַרטן פון אומקרייזווינקלען, וועלכע מיר זעהען אויף דער פיג. 56.

I) אומקרייזווינקל BCH, וואָס **איין זייט זיינע** (COH) **איז אַ דיאַמעטער** פון אומקרייז (O—דער צענטער), זיין געהעריגער בויגן HB, זיין געהעריגער צענטערווינקל HOB; מיר דאַרפן באַווייזן, אַז $\sphericalangle BCH=(BOH:2)$ אין דער אמתן: COB איז אַ גלייכלעגדיגער 3-עק און $\sphericalangle C=B$, אָבער (151) $\sphericalangle BOH=C+! =2C$ און דעריבער איז $BCH=BOH:2$.

II) אומקרייזווינקל ACB, וואָס **בײדע זײַנע זייטן זײַנען כאָרדעס מיטן צענטער צווישן זיי**; זיין געהעריגער בויגן איז AHB, זיין צענטערווינקל—AOB, לאָמיר באַווייזן, אַז $\sphericalangle ACB=AOB:2$; דער דיאַמעטער CH שפּאַלט דעם אומקרייזווינקל ACB אין צוויי אַזוינע אומקרייזווינקלען ACH און HCB, וועלכע מיר האָבן באַהאַנדלט אין (I) $\sphericalangle ACH=AOH:2$, $\sphericalangle HCB = HOB:2$, $ACH+HCB = (AOH+HOB):2$ אָדער $\sphericalangle ACB=AOB:2$.

III) אומקרייזווינקל ACT', וואָס **בײדע זיינע זייטן זיינען כאָרדעס**, וועלכע ליגן בײדע **פון איין זייט צענטער** זיין בויגן AT', זיין צענטערווינקל AOT'; לאָמיר באַווייזן אַז $\sphericalangle ACT'=(AOT':2)$; ציהענדיג דעם

דיאַמעטער CH, וועלן מיר באַקומען, אַז דער באַהאַנדלטער ווינקל ACT′ איז די דיפערענץ פון צוויי נייַגעבילדעטע אומקרייַזווינקלען ACH און TCH, וועלכע זייַנען פון דערזעלבער אַרט ווי אין (I); $\sphericalangle ACH=(AOH:2)$ $\sphericalangle T'CH=(T'OH:2)$, ווייל (51) $\sphericalangle ACH-T'CH=(AOH-T'OH):2$ אָדער $ACT'=AOT':2$ (52).

IV) אומקרייַזווינקל KTB (אויבן רעכטס אויף דער פיג. 56), וואָס **איין זייט זייַנע איז אַ טאַנגענטע** (TK) **די צווייטע—אַ כאָרדע** (TB); זיין בויגן TB; זייַן צענטערווינקל TOB (TO פעלט אויף דער פיג.) לאָמיר באַווייַזן, אַז $\sphericalangle KTB=(TOB:2)$; ציהענדיג די כאָרדע BC פּאַראַלעל צו TK, באַקומען מיר, אַז $\sphericalangle KTB=TBC$ (I-139), $\smile CT=TB$ (195=יד) און במילא אויך $TOB=TOC$ (195=א); דער אומקרייַזווינקל TBC באַטרעפט (TOC:2) און ווייַל $KTB=TBC$ און $TOC=TOB$ איז $\sphericalangle KTB=(TOB:2)$, און דאָס האָבן מיר געדאַרפט באַווייַזן.

ג) שלוסזאַץ: אומקרייַזווינקלען, וואס שטיצן זיך אויף איין און דעמזעלבן בויגן, זייַנען גלייַך; ווי למשל די אומקרייַזווינקלען ACT′ און AHT′, וואס שטיצן זיך אויפן שותפותדיגן בויגן AT′, ווייַל זיי באַטרעפן ביידע די העלפט פון צענטערווינקל AOT′;

ג[1]) שלוסזאַץ: אַן אומקרייַזווינקל וואס שטיצט זיך אויף אַ דיאַמעטער איז אַ רעכטער, ווייל ביידע העלפטן פון דיאמעטער בילדן אַ צענטערווינקל, וואָס באַטרעפט 2d (96=ב); אַזוי למשל זייַנען די אומקרייַזווינקלען CAH און CT′H רעכטע, ווייַל זיי שטיצן זיך אויפן דיאַמעטער CH.

עס איז קלאר, אַז די זייַטן פון אַלע אומקרייזווינקלען, וואָס שטיצן זיך אויף דעם זעלבן בויגן, וועלן בילדן מיט זיין געהעריגער כאָרדע, אַ רייע דרייַעקן, וואָס שטימען איין אין זייער גרונדזייט און דאַכווינקל, ד.ה.

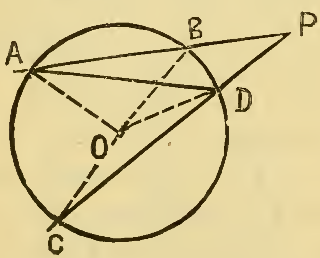
ג[2]) דער געאָמעטרישער אַרט (121) פון די דאַכפונקטן פון דרייַעקן מיט אַ שותפותדיגער גרונדזייַט און גלייַכע דאַכווינקלען איז אַן אומקרייַזבויגן, וואָס שפּאַנט די געגעבענע גרונדזייַט; און נאָך:

ג[3]) דער געאָמעטרישער אַרט פון פונקטן, פון וואַנען געצויגענע שטרעקעס דאַרפן בילדן אַ רעכטן ווינקל, וואס שטיצט זיך אויף אַ געגעבענער היפּאטענוזע, איז אַן אומקרייַז, וואס די דאָזיגע היפּאָטענוזע בילדעט זייַן דיאַמעטער.

ד) **באשטימונג.** א ווינקל וואס זיין שפּיצפּונקט ליגט אין דעם קרייז הייסט **אינקרייזווינקל**, ווי למשל $AO'C$ (פּיג. 56) די זייטן ($O'C$ און $O'A$) פון אזא ווינקל (כאָרדעס פון אומקרייז) און זייערע פּארליי־גערונגען ($O'T'$ און $O'H$) אין אנטקעגנדיגער ריכטונג, שניידן אויס פון אומקרייז צוויי בויגנס (AC און $T'H$), וועלכע הייסן **געהעריג** צום אינקרייזווינקל. יעדער אינקרייזווינקל האט צו זיך א מיטגעשטערקטן (89־ג) אינקרייזווינקל, וואס שניידט אויס פון אומקרייז אנדערע צוויי בויגנס; די צענטערווינקלען, וואס שטיצן זיך אויף די געהעריגע בויגנס פון אינקרייז־ווינקל, הייסן אויך **געהעריג** צו אים. דער וויטערדיגער זאין הדיקט אויס די שייכות צווישן אן אינקרייזווינקל און זיין געהעריגן צענטערווינקל.

ה) **אן אינקרייזווינקל באטרעפט די העלפט פון דער סו־מע פון זיינע געהעריגע צענטערווינקלען.** לאמיר באווייזן למשל אז $\measuredangle CO'A = (COA + HOT'):2$; פארבינדנדיג די פונקטן C און H דורך דער הילפשטרעקע CH, זעהען מיר, אז ווינקל $CO'A$ איז א דרויסנווינקל בנוגע צום 3־עק CHO' און דעריבער (151) איז $\measuredangle CO'A = O'CH + CHO'$: (ב) ווייטער איז $\measuredangle O'CH = (T'OH:2)$ און $\measuredangle CHO' = (COA:2)$ דעריבער $\measuredangle CO'A = T'OH:2 + COA:2$ איז (52), אָדער $\measuredangle C'OA = (T'OH + COH):2$.

ו) **באשטימונג:** א ווינקל, וואס זיין שפּיצפּונקט ליגט אויסער דעם קרייז און די זייטן בילדן סעקאנטעס, אדער טאנגענטעס פון אומקרייז הייסט **אויסער־קרייזווינקל** (APC פּיג. 57). די זייטן פון אויסערקרייזווינקל קענען בילדן אדער סעקאנטעס אדער טאנגענטעס פון אומקרייז, און יעדן פאל טיילן אויס די זייטן פון אויסערקרייזווינקל צוויי בויגנס, וועלכע ליגן צווישן זיינע זייטן און ציהען זיך אדער צווישן די שניטפונקטן (A, C, B און D פּיג. 57 2) אדער



פּיג. 57

צווישן די באריהרפונקטן, (T און B און ווינקל TKB פּיג. 56) אדער צווישן איין באריהרפונקט מיט צוויי שניטפונקטן. די צענטערווינקלען, וואס שטיצן זיך אויף די דאזיגע בויגנס, הייסן **געהעריג** צום אויסערקרייזווינקל; די שייכות צווישן אן אויסערקרייזווינקל מיט זיינע געהעריגע צענטערווינקלען איז אזא:

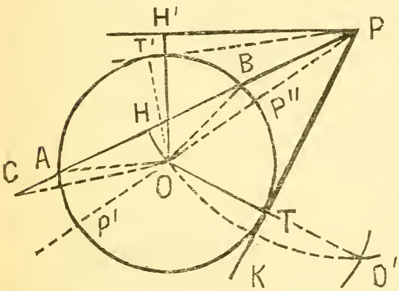
ז) **אן אויסערקרייזווינקל באטרעפט די העלפט פון דער דיפערענץ פון זיינע געהעריגע צענטערווינקלען.** לאמיר באווייזן דעם זאץ בנוגע צו אלע ארטן פון אויסערקרייזווינקלען, וועלכע קענען אונז

פארקומען.

I) אויסערקרייזווינקל APC (פיג. 57), וואס זיינע ביידע זייטן זיינען **סעקאנטעם** (PA און PC) פון אומקרייז. זיינע געהעריגע בויגנס זיינען BD און AC, די געהעריגע צענטערווינקלען BOD און AOC; מיר דארפן באווייזן אז $\sphericalangle APC=(AOC-BOD):2$; אין דער אמתן: פארבינדנדיג די פונקטן A און D דורך א כארדע (הילפליניע) AD באקומען מיר א דרייעק APD בנוגע וועלכן דער ווינקל ADC וועט זיין א דרויסנווינקל און דעריבער: $\sphericalangle ADC=APC+PAD$ (151), אדער $\sphericalangle APC=ADC-PAD$, זעט (II) איז $ADC=(AOC:2)$ און $PAD=(BOD:2)$ און דעריבער (52) $\sphericalangle APC=(AOC-BOD):2$;

II) אויסער קרייזווינקל APK (פ. 58) וואס **איין זייט זיינע איז א סעקאנטע** (PA) **די צווייטע א טאנגענטע** (TP) זיינע געהעריגע בויגנס BT און AT, זיינע געהעריגע צענטערווינקלען BOT און AOT; ציהענדיג א כארדע (הילפליניע) צווישן A און T, וועלן מיר מיטן זעלבן געדאנקענגאנג ווי אין (I) באווייזן (ב=IV), אז

$$\sphericalangle APT=(AOT-BOT):2$$



פיג. 58

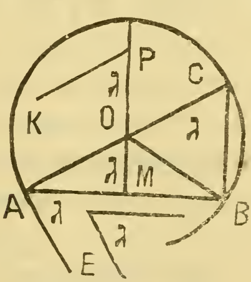
III) אויסערקרייזווינקל T'PT (פ. 58) וואס **ביידע זיינע זייטן זיינען טאנגענטעס**. די געהעריגע בויגנס — T'BT און T'AT; די צענטערווינקלען — T'OT (T'BT — זיין בויגן) און דער פוקלער צענטערווינקל T'OT (זיין בויגן T'AT); ציהענדיג א כארדע (הילפליניע) T'T צווישן ביידע בארירפונקטן, וועלן מיר ווי אין (I) באווייזן (ב-IV), אז T'PT באטרעפט די העלפט פון דער דיפערענץ פון די צענטערווינקלען, וואס שטיצן זיך אויף די בויגנס T'AT און T'BT.

ח) **ביי דער אויסרעכענונג** פון די אלערליי באהאנדלטע ווינקלען פון אומקרייז (אומקרייזווינקלען, אינקרייזווינקלען און אויסערקרייזווינקלען) דארף אונז געגעבן ווערן די גרויס פון די געהעריגע צענטערווינקלען, ווייל אבער א צענטערווינקל אנטהאלט דיזעלבע צאל ווינקלגראדן, ווי זיין געהעריגער בויגן אנטהאלט בויגנגראדן (זעה 31, 32, 33, 34) **קענען אונז געגעבן ווערן נאר די צאלן פון גראדן, וואס זיינען אנטהאלטן אין די געהעריגע בויגנס**, אויף וועלכע די געזוכטע ווינקלען שטיצן זיך. אזוי

למשל, אנטהאַלט אַ צענטערווינקל, וואָס שטיצט זיך אויף א בויגן פון 20^0 (בויגנגראדן) דיזעלבע צאָל 20^0 (ווינקלגראַדן).

ט) אויפגאַבע: פֿון א געגעבענעם פונקט, וואָס ליגט אויסער אַ געגעבענעם אומקרייז, ציהען אַ טאנגענטע צום דאזיגן אומקרייז. (פיג. 58) דער שלוסזאַץ (ג[3]) פאַרהעלפֿט אונז צו לייזן די אויפגאַבע אַנדערש ווי אין (194=יא). נעמענדיג די שטרעקע (PO) צווישן געגעבענעם פונקט (P) און צענטער (O) פון אומקרייז פאַר אַ דיאַמעטער, טיילן מיר זי אויף דער העלפט, כדי צו געפינען דעם צענטער, און ציהען איבער איר אַן אומקרייז, וועלכער וועט שניידן דעם געגעבענעם אין די פונקטן T און T'; פאַרבינדנדיג די דאָזיגע פונקטן מיט P, וועלן מיר באַקומען די צוויי טאַנגענטעס פון P צום געגעבענעם אומקרייז. **באַווייז:** די פונקטן T און T' ליגן אויפן נייגעצויגענעם אומקרייז און בילדן די שפּיצן פֿון אומקרייזווינקלען (PTO און PT'O), וועלכע שטיצן זיך אויפן דיאַמעטער; פון (ג[1]) ווייסן מיר, אַז אַזאַ אומקרייזווינקל איז אַ רעכטער, דער שפּיצפונקט פון דאָזיגן רעכטן ווינקל ליגט אָבער אויך אויפן געגעבענעם אומקרייז אַזוי, אַז ער קומט אויס צווישן ראַדיוס OT און דער גראָדער PT און (194=ד).

י) אויפגאַבע: אויף אַ געגעבענער שטרעקע אויפשטעלן דעם אומקרייזבויגן, וואָס זאָל איינשליסן אַן אומקרייזווינקל פֿון אַ געגעבענעם גרויס, ד. ה. אויפשטעלן דעם געאָמעטרישן אָרט (ג[2]) (פיג. 59). **געגעבן:** די שטרעקע AB און דער ווינקל ג. **אויפגאַבע:** געפינען דעם צענטער און ראַדיוס פון אומקרייזבויגן ACB, וואָס יעדער אומקרייזווינקל, וואָס שטיצט זיך אויף דער געגעבענער כאָרדע AB, זאָל באַטרעפן ג.



פיג. 59

אנאַליז: AB איז אַ כאָרדע פון געזוכטן אומקרייזבויגן, דעריבער דאַרף דער געזוכטער צענטער (O) ליגן אויף דער מיטנזיילרעכטער צו איר (195=ה[1]) דער צענטערווינקל, וואָס שטיצט זיך אויף AB, דאַרף באַטרעפן 2ג (196=ב) דער ווינקל צווישן דער מיטנזייל־רעכטער צו AB און אַ ראַדיוס צו איר אַן ענדפונקט דאַרף באַטרעפן ג (ווינקל MOA) (195=ה[2]); דערפון ווערט אונז קלאָר די **אויפשטעלונג:** מיר שטעלן אויעק די מיטנזיילרעכטע פון AB, בײַ וועלכן עס איז פונקט איר

(P) שטעלן מיר אויף אַ ווינקל 0PK, וואָס זאָל באַטרעפֿן ג, דורכן ענדע־פונקט A פון דער כאָ־רדע AB ציִען מיר אַ גראָדע AO פּאַראַלעל צו KP; דער שניטפונקט 0 פון M0 מיט A0 באַשטימט פולקום (72) די לאַגע פון צענטער און די גרוים פֿון ראַדיוס (AO) ווײַל ווינקל AOM באַטרעפֿט אויך ג (111=139). כדי דער ווינקל A OM זאָל באַטרעפֿן ג, ווערט דורכגעפירט נאָך א לייזונג: בײַ אַן ענדעפונקט (A למשל) פון AB ווערט אויפגעשטעלט א ווינקל MAE, וואָס באַטרעפֿט ג, אין וועלכן פונקט A ווערט געצויגן א זײַלרעכטע (AO) צו דער צווייטער זײַט AE פון ווינקל; די דאָזיגע זײַלרעכטע (A O) וועט שנײַדן די מיטנזײַלרעכטע צו AB מיטן ווינקל ג, ווײַל ∢ AOM=MDC (144); דעם באַווײַז צו ביידע אויפשטעלונגען איז לייכט צו ברענגען.

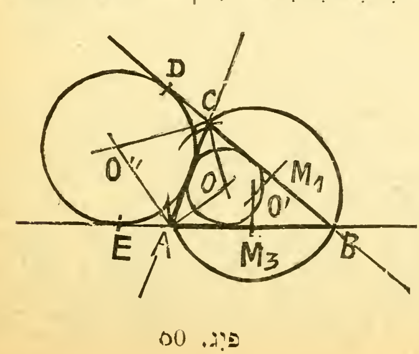
197. **איצט** ווילן מיר באַטראַכטן די אײַנשאַפטן פֿון פיגורן, וועלכע זײַנען געבילדעט דורך אומקרייזן מיט פילעקן.

א) באַשטימונג: אַ פילעק, וואָס זײַנע זײַטן זײַנען כאָרדעס און די ווינקלען־אומקרײַזווינקלען פון איין און דעמזעלבן אומקרייז, הייסט **אַרײַנגעצייכנט** אין דעם דאָזיגן אומקרייז; דער אומקרייז הייסט **אַרומגעצייכנט** אַרום דעם דאָזיגן פילעק.

א*) באַשטימונג: אַ פילעק, וואָס אַלע זײַנע זײַטן זײַנען טאַנגענטעס פון איין און דעמזעלבן אומקרייז, הייסט **אַרומגעצייכנט** אַרום דעם דאָזיגן אומקרייז; דער אומקרייז הייסט **אַרײַנגעצייכנט** אין דעם דאָזיגן פילעק

ב) אַרום יעדן דרייעק קען מען אַרומצייכענען אן אומקרייז, און נישט מער ווי איינעם ד. ה. עס איז פאַראַן אַ פונקט אין דרייעק (דער צענטער פון געזוכטן אומקרייז), וועלכער איז גלײַך דערווײַטערט פון די דרײַ שפּיצפונקטן זײַנע, וועלכע דאַרפן הייסט עס ליגן אויפן געזוכטן אומקרייז. **באַווײַז:** (168־ב)

ב*) אויפשטעלונג: אַרום אַ געגעבענעם 3־עק אַרומצייכענען אַן אומקרייז. (פיג. 60)



פיג. 60

לייזונג: מיר שטעלן אַוועק צוויי מיטנזײַלרעכטע (M_3O און M_1O) צו צוויי וועלכע עס איז זײַטן (AB און AC) פון געגעבענעם 3־עק (ABC), וועלכע שנײַדן זיך אין צענטער פון געזוכטן אומקרייז. די שטרעקע צווישן דעם דאָזיגן שניטפונקט מיט

אַ וועלכן עס איז שפּיצפּונקט פון 3עק איז דער ראדיוס פון געזוכטן אומקריַיז.

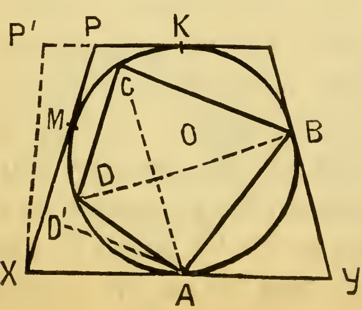
ג) עס איז קלאָר, אַז דער צענטערווינקל פון אַרומגעצייכנטן אומקריַיז, וועל־כער שטיצט זיך אויף אַ וועלכער עס איז זיַיט פון געגעבענעם דריַיעק, איז דאָפּלט אַזוי גרויס, ווי דער אַנטקעגנדיגער ווינקל פון 3־עק גופא (196=ב). דעריבער ליגט דער צענטער פון אַן אומקריַיז, וואָס איז אַרומגעצייכנט אַרום אַ שפּיצווינקלדיגן 3־עק אין דעם 3־עק גופא, ביַי אַ רעכטווינקלדיגן—אין מיטנ־פּונקט פון דער היפּאָטענוזע, ביַי אַ טעמפּווינקלדיגן—אויסער אים.

ד) **דורך יעדע דריי פּונקטן, וואָס ליגן ניט אַלע אויף איין גראָדער, קען מען ציהען אַן אומקריַיז.** דער זאַץ ווערט קלאָר פון (ב).

ה) **אין יעדן דריַיעק קען מען אריַינצייכענען אַן אומקריַיז און ניט מער ווי איינעם,** ד. ה. עס איז פאַראַן אַ פּונקט אין דריַיעק (דער צענטער פון געזוכטן אומקריַיז),וועלכער איז גלייך דערוויַיטערט פון די דריי זיַיטן זיַינע, וועלכע דאַרפן הייסט עס באַריִרן דעם געזוכטן אומקריַיז; באַוויַיז (168=א).

ה*) **אין אַ געגעבענעם 3 עק אַריַינצייכענען אַן אומקריַיז.** **לייזונג:** מיר ציהען די ביסעקטריסעס (C0 און B0) פון צוויי וועלכע עס איז ווינקלען (B און C) פון געגעבענעם 3עק (ABC). וועלכע שניַידן זיך אין צענטער פון געזוכטן אומקריַיז. די ווייַלרעכטע פון דאָזיגן שניטפּונקט אויף אַ וועלכע עס איז זיַיט פון 3עק איז דער ראַדיוס פון געזוכטן אומקריַיז.

ה**) דער שניטפּונקט "0 פון די ביסעקטריסעס פון איין אינעווייניגסטן ווינקל ("A0 און די דרויסנווינקלען פון די איבעריגע ווינקלען פון דריַיעק ("C0 און "B0) וועלן זיך שניַידן אויך אין איין פּונקט—דעם צענטער פון אומקריַיז, וועלכער וועט באַריִרן די זיַיט (CB), וואָס ליגט אַנטקעגן דעם דאָזיגן אינעווייניגסטן ווינקל, און די פאַרלייַנגערונגען (CD און BE) פון די איבעריגע צוויי זיַיטן פון געגעבענעם 3עק (ABC). אַ אַ אומקרייז הייסט **אריַינגעצייכנט פון דרויסן.**



פיג. 61

ו) **אין יעדן אַריַינגעצייכנטן פירעק באַטרעפט די סומע פון די אַנטקעגנדיגע ווינקלען** 2d. (פיג. 61).

פאַראויסג.: ABCD—אַן אַריַינגעצייכנטער פירעק; **פעסטשט.:** 1) $\sphericalangle A+C=2d$

2) $\sphericalangle B+D=2d$; הילפ־

ליניעס: די דיאגאנאלעס: AC און BD; **באווייז:** די סומע פון אלע ווינקלען פון פירעק באטרעפט $4d$ (181־א) יעדע **פאר** אנטקעגנדיגע ווינקלען שטעלט זיך צונויף פון 4 אומקרייזווינקלען, וואס יעדער פון זיי האט צו זיך א גלייך גרויסן ווינקל פון דער צווייטער **פאר**, ווייל זיי שטיצן זיך אויף איין און דערזעלבער זייט כארדע פון אריינגעצייכנטן פירעק. אזוי למשל האט דער ווינקל DBA פון דער **פאר** $(D+B)$ צו זיך א גלייכן ווינקל DCA פון דער **פאר** $(A+C)$ ווייל זיי שטיצן זיך ביידע אויף איין און דעמזעלבן בויגן DA דאסזעלבע מיט יעדן ווינקל פון דער פאר $(D+B)$. אויף אזא אופן ווערט די סומע $4d$ פון אלע אינעווייניגסטע ווינקלען פון פירעק צוטיילט אויף דער העלפט צווישן ביידע **פארן** $(A+C)$ און $(D+B)$, קומט אויס אויף יעדער **פאר** באזונדער א העלפט פון $4d$ ד.ה. $2d$ (שרייב אן דעם באווייז אין גלייכונגען!)

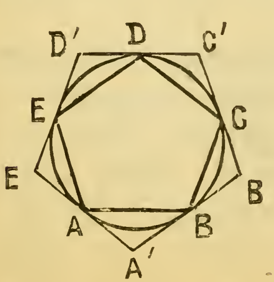
ו*) (פארקערט צו ו): **באטרעפט די סומע פון א פאר אנטקעגנדיגע ווינקלען פון א פירעק** $2d$, **דאן קען מען ארום אים ארומצייכענען אן אומקרייז** (פיג. 61) **פאראויסב.:** אין פירעק $ABCD$ איז $\sphericalangle A+C=2d$ **פעסטשט.:** דורך די פונקטן A, B, C און D קען מען ציהען אן אומקרייז. **באווייז:** $(B+D)$ מוז אויך באטרעפן $2d$ (181=**א**); דורך די פונקטן A, B און C קען מען ציהען אן אומקרייז (**ד**) און וואלט דער דאזיגער אומקרייז געשניטן די זייט CD פון פירעק ניט אין פונקט D, נאר אין א וועלכן עס איז אנדערן פונקט, למשל D', דאן וואלטן מיר געהאט (לויט ו), אז $\sphericalangle B+D=2d$ און ווייל $B+D=2d$, וואלט אויסגעקומען אז $B+D=B+D'$ (47) אדער $\sphericalangle D=D'$ (51) דאס איז אבער אבסורד, ווייל ווינקל D איז א דרויסנווינקל בנוגע דעם 3עק ADD' און (151=**א**), בלייבט, הייסט עס, אז דער אומקרייז קען ניט מיידן דעם פונקט D און מוז זיך ציהען דורך אים.

ז) **אין יעדן ארומגעצייכנטן פירעק זיינען די סומעס פון די אנטקעגנדיגע זייטן גלייך צווישן זיך.** (פיג. 61) **פאראויסב.:** $XYEP$—אן ארומגעצייכנטער פירעק פונקט E פעלט אויף דער פיגור 60 אויבן רעכטס) **פעסטשט.:** $XY+EP=YP+EY$; **באווייז:** יעדע **פאר** אנטקעגנדיגע זייטן פון ארומגעצייכנטן פירעק שטעלט זיך צונויף פון פיר טאנגענטעס (וואס גייען ארויס פון די שפיצפונקטן פון פירעק), וואס יעדע פון זיי האט צו זיך א גלייך לאנגע טאנגענטע פון דער צווייטער פאר, ווייל זיי גייען ארויס פון איין און דעמזעלבן פונקט (שפיצפונקט פון פירעק) (194=**יב**). אזוי למשל האט די טאנגענטע PM פון דער **פאר** $(XP+EY)$ צו זיך א גלייך לאנגע טאנגענטע PK פון דער **פאר** $(XY+EP)$, ווייל זיי גייען ביידע ארויס

פון איין און דעמזעלבן פונקט P; דאָסזעלבע מיט יעדער טאַנגענטע פון דער **פּאָר** $(XP+EY)$; אויף אַזאַ אופן ווערט דער פּערימעטער $XYEP$ פון אַרומגעצייכנטן פּירעק צוטיילט אויף דער העלפט צווישן ביידע **פּאָרן** $(XP+EY)$ און $(XY+PE)$ און אויף יעדער **פּאָר** קומט אויס די העלפט פון איין און דעמזעלבן פּערימעטער און דעריבער זיינען זיי גלייך ד.ה. $XY+PE=XP+EY$ (פיר דורך דעם באַווייז אין גלייכונגען!)

ז*) (פּאַרק. צו ז): **זיינען די סומעס פּון די אנטקעגנדיגע זייטן פון א פירעק גלייך צווישן זיך, דאן קען מען אריינצייכענען אין אים א פירעק.** (פיג. 61) **פּאָראויסג.:** אין פירעק $XYEP$ איז: $XY+EP=XP+EY$ **פּעסטשט.:** אין פירעק $XYEP$ קען אַריינגעצייכנט ווערן אן אומקרייז, ד.ה. XY, XE, EP און PX זיינען טאַנגענטעס פון איין און דעמזעלבן אומקרייז. **באַווייז:** אַן אומקרייז, וואָס זאָל באַרירן דריי זייטן (למשל XY, YE און EP) פון געגעבענעם פּירעק, איז שטענדיג מעגלעך צו ציהען: דערצו דאַרפן מיר נאָר געפינען דעם שניטפונקט פון די ביסעקטריסעס (121=ב) פון די ווינקלען, וואָס ליגן ביי דער מיטלסטער פון די דריי זייטן (YE); דער דאָזיגער שניטפונקט וועט זיין דער צענטער פון געזוכטן אומקרייז. ווען דער דאָזיגער אומקרייז ניט באַרירן די פערטע זייט (XP) פון געגעבענעם פירעק, דאַן וועט אַ וועלכע עס איז אַנדערע, גראָדע XP' למשל, זיין אַ טאַנגענטע צו אים און מיר וועלן האָבן (לויט ז), אַז $XY+P'E=XP'+EY$; אַראָפּרעכענענדיג פון דער באַקומענער גלייכונג די גלייכונג פון אונזער פאָראויסבאַרונג, וועלן מיר באַקומען:
$XY+P'E-XY-EP=XP'+EY-XP-EY$ אָדער $P'E-EP=XP'-XP$ (52) אָדער $P'P=XP'-XP$; דאָס איז אָבער אבסורד, ווייל וועגן דרייעק XPP' האָבן מיר, אַז $P'P>XP'-XP$ (148).

ז**) **שלוסאצן: ארומצייכענען** אַן אומקרייז קען מען **ארום א רעכטעק, א קוואדראט און א גלייכלענדיגער טראפּעציע; אריינצייכענען** אן אומקרייז קען מען **אין אַ ראָמב, און אַ קוואַדראַט.**



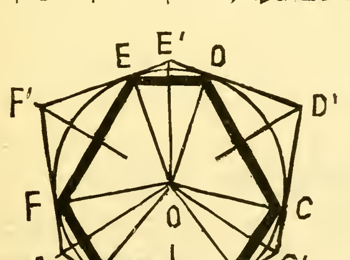
פיג. 62

ה) **אַרום יעדן רעגלמעסיגן** (191) **פּירעק קען מען אַרומצייכענען אַן אומקרייז: אין יעדן רעגלמעסיגן פּילעק קען מען אריינצייכענען אן אומקרייז** (פיג. 62): דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז הייסט אויך ראַדיוס פון רעגלמעסיגן

פּילעק דער ראַדיוס פֿון אַרײַנגעצײכנטן אומקרײַז הײסט **אַפּאָטעמע** פֿון רעגלמעסיגן פּילעק. דער זאַץ זאָגט, אַז אין יעדן רעגלמעסיגן פּילעק איז פֿאַראַן אַ פּונקט, וואָס זײַן צענטער שטײט אָפּ גלײַך ווײַט פֿון אַלע זײַנע שפּיצפּונקטן און אַ פּונקט וואָס איז גלײַך דער־ווײַטערט (116=ב אשטימונג) פֿון זײַנע זײַטן. פֿון (191=ב) ווײסן מיר דעם באַווײַז אַז אַ פּונקט, וואָס זאָל פֿאַרמאָגן די בײדע אײגנשאַפֿטן, איז אין דער אמתן פֿאַראַן אין יעדן רעגלמעסיגן פּילעק.

ט) יעדער אַרײַנגעצײכנטער פּילעק, וואָס איז אַ גלײַכזײַטיגער, איז אויך אַ גלײַכווינקלדיגער ד. ה. אַ רעגלמעסיגער. דער אַרײַנגעצײכנטער פֿינפֿעק ABCDE למשל (פֿיג. 62) איז אַ גלײַכזײַטיגער; עס איז לײַכט צו באַווײַזן, אַז ער איז אויך אַ גלײַכווינקלדיגער, ד. ה. אַ רעגלמעסיגער (191). אין דער אמתן: זײַנען זײַנע זײַטן אַלס כאָרדעס פֿון אומקרײַז גלײַך צווישן זיך, דאַן זײַנען זײערע געהעריגע בויגנס אויך גלײַך צווישן זיך (195=ב), און אַזוי ווי יעדער ווינקל, אַלס אומקרײַזווינקל, שטיצט זיך אויף אײן און דער־זעלבער צאָל (וואָס איז מיט צוויי ווײניגער פֿון דער צאָל זײַטן פֿון פּילעק) גלײַכע בויגנס, דאַרפֿן אַלע די דאָזיגע אומקרײַזווינקלען אויך זײַן גלײַך צווישן זיך, ד. ה. דער אַרײַנגעצײכנטער פּילעק איז גלײַכזײַטיג און אויך גלײַכווינקלדיג אין דרײַבער רעגלמעסיג.

ט*) איז די צאָל זײַטן פֿון אַן אַרײַנגעצײכנטן גלײַכווינקלדיגן פּילעק אַן אומצאָל, דאַן איז דער דאָזיגער פּילעק אויך אַ גלײַכזײַטיגער, ד. ה. אַ רעגלמעסיגער; ווען די צאָל זײַטן איז אַ גראָדצאָל, דאַן קען (אָבער ניט „מוז")—דער דאָזיגער פּילעק זײַן אויך אַן אומגלײַכזײַטיגער ד. ה. אַן אומרעגלמעסיגער. **באַווײַז:** איז דער פּילעק אַרײַנגעצײכנט אין אומקרײַז, דאַן קענען זײַנע ווינקלען זײַן גלײַך צווישן זיך נאָר בתנאי, ווען ענטוועדער אַלע כאָרדעס, וועלכע בילדן די דאָזיגע אומקרײַזווינקלען, זײַנען גלײַך צווישן זיך, אָדער ווען די כאָרדעס, וואָס בילדן די ווינקלען זײַנען אומגלײַך, נאָר אַזוי, אַז אַלע גרעסערע כאָרדעס זײַנען גלײַך צווישן זיך און אַלע קלענערע כאָרדעס זײַנען גלײַך צווישן זיך און שליסן זיך נאָכאַנאַנד אַ גרעסערע מיט אַ קלענערער, אָבער ניט צוויי גרעסערע אָדער צוויי קלענערע צוזאַמען. אין ערשטן פֿאַל, ווען אַלע כאָרדעס זײַנען גלײַך צווישן זיך, קען



פֿיג. 63

דער פּילעק פאַרמאָגן סײַ אַ גראָדע צאָל זײַטן (פּיג. 52), סײַ אַן אומגראָדע (פּיג. 62, דער אײַנגעווײַניגסטער פּינפעק). אין צווייטן פאַל, ווען די כאָרדעס זײַנען אומגלײַך, מוז דער פּילעק האָבן אַ גראָדע צאָל זײַטן, ווײַל די צאָל פון די גרעסערע כאָרדעס דאַרף זײַן גלײַך דער צאָל פון די קלענערע. און דאָס זעהען מיר טאַקע אין דעם אַרײַנגעצייכנטן זעקסעק פון דער פּיג. 63. יעדער רעכטעק, וואָס איז אַרײַנגעצייכנט אין אַן אומקרײַז באַווײַזט דאָסזעלבע (גלײַכע ווינקלען בײַ אומגלײַכע זײַטן).

ט) יעדער אַרומגעצייכנטער פּילעק, וואָס איז אַ גלייכ־ווינקלדיגער איז אויך אַ גלייכזײַטיגער ד. ה. אַ רעגלמעסיגער

דער אַרומגעצייכנטער פּינפעק A′B′C′D′E′ למשל (פּיג. 62) איז אַ גלייכווינקלדיגער; עס איז לײַכט צו באַווײַזן, אַז עס איז אויך אַ גלייכזייטיגער, ד. ה. אַ רעגלמעסיגער (191). אין דער אמתן: זײַנען די זײַטן זײַנע טאַנגענ־טעס צום אומקרײַז, דאַן וועט יעדער ווינקל זיינער (די אויסערקרײַזווינקלען בנוגע צום אומקרייז) געטײַלט אויף דער העלפט דורך דער גראַדער, וואָס פאַרבינדט זיין שפּיצפּונקט מיטן צענטער (194־יב), ווי מיר זעהען עס אויף דער פּיג. 63 וואו 0A′ למשל טײַלט אויף דער העלפט דעם ווינקל A′־F. זײַנען די ווינקלען גלײַך צווישן זיך, דאַן זײַנען זײַערע העלפטן אויך גלײַך צווישן זיך, (51); אויב אַזוי, בילדעט יעדע זײַט פון אַרומגעצייכנטן פּילעק מיט בײַדע שטרע־קעס (צווישן צענטער פון אַרומגעצייכנטן אומקרײַז און די שפּיצפּונקטן) אַ גלײַ־לענדיגן 3־עק. דער ראַדיוס פון אַרײַנגעצייכנטן אומקרייז, וואָס ציהט זיך צום באַרירפּונקט, וועט זײַן די הויכליניע פון דאָזיגן גלײַכלענדיגן 3־עק (194־ו) און אַזוי ווי די הויכליניע פון אַלע די דאָזיגע גלײַכלענדיגע 3־עקן זיינען גלײַך אַלס ראַדיוסן פון אַרײַנגעצייכנטן אומקרייז, זיינען די דאָזיגע 3עקן קאָנ־גרועגט, ווייל זיי שפּאַלטן זיך־דורך די הויכליניעס אין קאָנגרועגץ רעכטווינ־קלדיגע 3־עקן (162־ב). זיינען די דאָזיגע גלײַכלענדיגע 3־עקן קאָנגרועגט, דאַן זײַנען זײַערע גרונדליניעס (ד. ה. די זײַטן פון דעם אַרומגעצייכנטן פּילעק) גלייך. אונזער אַרומגעצייכנטער גלייכווינקלדיגער פּילעק איז אויך אַ גלייכזײַ־טיגער ד. ה. אַ רעגלמעסיגער.

י*) איז די צאָל זײַטן פון אַן אַרומגעצייכנטן גלייכזײַטיגן פּילעק אַן אומצאָל, דאַן איז דער דאָזיגער פּילעק אויך אַ גלייכווינקלדיגער ד. ה. אַ רעגלמעסיגער; ווען די צאָל זײַטן איז אַ גראָדצאָל, דאַן קען (אָבער ניט „מוז“) דער דאָזיגער פּילעק זײַן אויך אַן אומגלײַכווינקלדיגער ד. ה. אַן אומרעגלמעסיגער. **באַווײַז:** איז דער פּילעק

אַרומגעצייכנט אַרום אומקרייז, דאַן קענען זיינע זייטן זיין גלייך צווישן זיך נאָר בתנאי, ווען אַלע ווינקלען זיינע, וועלכע בילדן אויסערקרייזווינקלען פון אומקרייז, זיינען אדער גלייך צווישן זיך, אָדער אומגלייך נאָר אַזוי, אַז אַלע גרעסערע ווינקלען זיינען גלייך צווישן זיך, און אַלע קלענערע צווישן זיך און גייען אַרום אומקרייז נאָכאַנאַנד, אַ גרעסערער נאָך אַ קלענערן און דאַן ווידער אַ גרעסערער א. א. וו. דאָס וועט קלאָר דערפון, וואָס אַלע 3עקן, וועלכע ווערן געבילדעט דורך די זייטן פון פילעק מיט די שטרעקעס צווישן זיינע שפּיצן און דעם צענטער פון אומקרייז, מוזן זיין קאָנגרועטנט (ווי אין י), ווייל זיי שטימען איין אין דער גרונדזייט, דער הויכליניע (ראַדיוס פון אומקרייז) און אין ווינקל ביי דער גרונדזייט (די העלפט פון ווינקל פון פילעק). אין ערשטן פאַל, ווען אַלע ווינקלען זיינען גלייך, קען דער פילעק פאַרמאָגן סיי אַ גראָדע צאָל זייטן (פיג. 52) סיי אַן אומגראָדע (פיג. 62 דער אויסנווייניגסטער פינפ-עק); אין צווייטן פאַל, ווען יעדע צוויי ווינקלען, וואָס ליגן ביי איין זייט פון פילעק, זיינען אומגלייך, מוז ער האָבן אַ גראָדע צאָל ווינקלען, ווייל די צאָל פון די גרעסערע ווינקלען דאַרף זיין גלייך דער צאָל פון די קלענערע; די צאָל זייטן וועלכע איז גלייך דער צאָל פון די ווינקלען, דאַרף אויך זיין אַ גראָדע צאָל און דאָס זעהען מיר טאַקע אין דעם אַרומגעצייכנטן זעקסעק פון דער פיג. 63. יעדער ראָמב, וואָס איז אַרומגעצייכנט אַרום אַן אומקרייז, באַווייזט דאָסזעלבע (גלייכע זייטן ביי אומגלייכע ווינקלען).

198. איצט וועלן מיר באַטראַכטן אַלערליי מעגלאַכע געגנזייטיגע לאַגעס פון צוויי אומקרייזן.

א) **באַשטימונגען:** האָבן צוויי אומקרייזן איין שותפותדיגן פונקט, דאַן הייסט עס, אַז די **אומקרייזן באַרירן זיך** אין דעם דאָזיגן פונקט, וועלכער הייסט **באַרירפּונקט**. (פיג. 65) האָבן צוויי אומקרייזן מער ווי איין שותפותדיגן פונקט, דאַן זאָגן מיר, אַז די **אומקרייזן שנײַדן זיך**. (פ. 66) די גראָדע, וועלכע פאַרבינדט די צענטערס פון צוויי אומקרייזן, הייסט זייער **צענטערליניע** אָדער **צענטראַלע**. (′00 פיג. 64)

ב) וואָס אנבאלאנגט דער צאָל און דער לאַגע פון די פּונקטן, וואָס צוויי אומקרייזן קענען האָבן שותפותדיג, גילט אַזאַ זאַץ: **האָבן צוויי אומקרייזן אַ שותפותדיגן פונקט פון איין זייט פון דער צענטערליניע, דאַן האָבן זיי אַ צווייטן שותפותדיגן פונקט פון איר צווייטער זייט, ד. ה. די אומקרייזן שנײַדן זיך.**

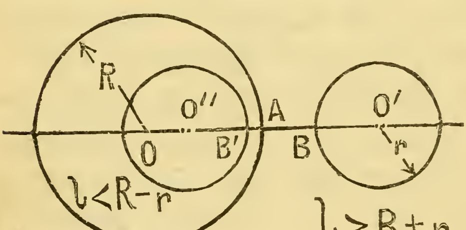
באַווייז: די צענטראַלע איז די סימעטריאַקס פון די העלפטן פון ביידע אומקרייזן, וואָס ליגן פון פאַרשיידענע זייטן אירע, ווייל אויף איר ליגן די דיאַ-

מעטערס פֿון ביידע אומקרײַזן (193=ו). דער שניטפּונקט פֿון ביידע אומקרײַזן ליגנדיג פֿון זײַט פֿון דער צענטראַלע, מוז האָבן צו זיך אַ סימעטרישן פֿון איר צווייטער זײַט (110־ב), וועלכער דאַרף ליגן איינצײַטיג אויף ביידע אומקרייזן (122=ד) ד. ה. אויך זיין אַ שותּפֿותדיגער ביי ביידע, און די אומקרײַזן שנײַדן זיך (א).

ב*) שלוסזאַץ: די צענטראַלע פֿון צוויי אומקרײַזן, וואס שנײַדן זיך, איז די מיטנזײַלרעכטע פֿון זייער שותּפֿותדיגער כאָרדע. (113)

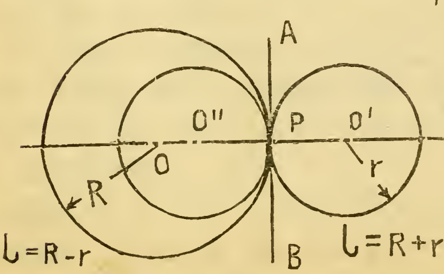
ב) שלוסזאַץ:** ווען צוויי אומקרייזן באַריִרן זיך, דאַן מוז דער באַריר־פּונקט ליגן אויף דער צענטראַלע (110=ג), ווען ניט וואָלטן די אומקרייזן גע־האַט נאָך אַ שותּפֿותדיגן פּונקט, ד. ה. זיי וואָלטן זיך געשניטן און דאָס וואָלט סיתר געווען דעם פֿאָראויסבאַדונג.

וועלכע לאַגע צוויי קרייזן זאָלן ניט פֿאַרנעמען איינער בנוגע צום אַנדערן, ליגט **דער צענטער פֿון איינעם** פֿון זיי **ענטוועדער אין דעם צווייטן, אדער אויסער אים.** דערפֿון ווערט קלאָר, אַז איין אומקרײַז קען אָננעמען בנוגע דעם צווייטן איינע פֿון די זעקס לאַגעס, וועלכע מיר וועלן באַלד באַהאַנדלען, און וועלכע רופֿן זיך אָפּ אויף דער שײַכות צווישן די לײַנגען פֿון דער צענטערליניע און די ראַדיוסן.



פֿיִג. 64

ג) **צוויי אומקרײַזן האָבן קיין שום שותּפֿותדיגן פּונקט.** פֿון דער פֿיג 64 איז קלאָר, אַז ווען זיי ליגן איינער אויסער דעם צווייטן, איז **די צענטערליניע גרעסער פֿון דער סומע פֿון זייערע ראַדיוסן און קלענער פֿון דער דיפֿערענץ פֿון זייערע ראַדיוסן**, ווייל $OA-O''B'=OO''+B'A$ און דעריבער איז $OA-O''B'>OO''$

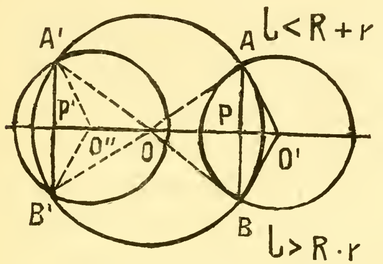


פֿיִג. 65

ד) **צוויי אומקרײַזן** האָבן איין שותּפֿותדיגן פּונקט, ד. ה. זיי **באַריִרן זיך** פֿון דער פֿיג. 65 איז קלאָר אָן א באַווייז, אַז **די צענטערליניע באַטרעפֿט די סומע פֿון זייע־**

רע ראַדיוסן, װעט די אומקרײַזן ליגן אײנער אויסער דעם צװײטן—דאָס איז דער פאַל פון **אויסנװײניגסטער באַרירונג; די צענטערליניע באַטרעפט די דיפערענץ פון זײערע ראַדיוסן אין פאַל פון אינעװײניגסטער באַרירונג.**

ה) **צװײ אומקרײַזן** האָבן צװײ שותפותדיגע פונקטן, ד. ה. זײ **שנײדן זיך** אין דעם פאַל בילדן די צענטערליניע מיט די ראַדיוסן פון בײ־דע אומקרײַזן װעלכע ציהען זיך דורך זײערן אַ שניטפונקט א דרײַעק און (148) ד. ה. **די צענטערליניע איז גרעסער פון דער סומע פון זײערע ראַדיוסן און גרעסער פון זײער דיפערענץ;** דער זאַץ גילט **פאַר בײדע לאַגעס:** סײַ װען דער צענטער פון אײן קרײַז ליגט אין צװײטן, סײַ װען ער ליגט אויסער אים.



פיג. 66

ו) **יעדע** צװײ פון די זאַצן (ג), (ד) און (ה) קענען גילטן פאַר נעגאַ־טיװע צום דריטן, װײַל יעדע לאַגע שליסט אויס די איבעריגע. אויב אַזוי, הײסט עס, זײַנען די פאַרקערטע זאַצן פון (ג, ד און ה) אויך ריכטיג (42)

I) **איז די צענטערליניע פון צװײ אומקרײַזן גרעסער פון דער סומע פון זײערע ראַדיוסן, אָדער קלענער פון זײער דיפערענץ,** דאַן האָבן די דאָזיגע אומקרײַזן **קײן שום שותפותדיגע פונקטן** און ליגן אין ערשטן פאַל אײנער אויסער דעם צװײטן און אין צװײטן פאַל אין דעם צװײטן.

II) **איז די צענטערליניע פון צװײ אומקרײזן גלײַך דער סומע אָדער דער דיפערענץ, פון זײערע ראַדיוסן,** דאַן האָבן די דאָזיגע אומקרײַזן אײן פונקט שותפותדיג, ד. ה. זײ **באַרירן זיך** אין ערשטן פאַל פון אויסנװײניג, אין צװײטן פון אינעװײניג.

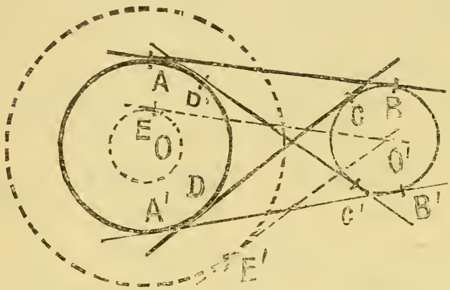
III) **איז די צענטערליניע פון צװײ אומקרײַזן קלענער פון דער סומע און גרעסער פון דער דיפערענץ פון זײערע ראַדיוסן** דאַן האָבן די דאָזיגע אומקרײַזן צװײ שותפותדיגע פונקטן, ד. ה. **זײ שנײדן זיך.**

באַמ. עס איז קלאָר, אַז װען צװײ אומקרײזן זײַנען קאָנצענטריש (192־ד) **באַטרעפט די לײַנג פון דער צענטראַלע נול. אזא לאַגע איז אײגנטלאַך א**

פּרט-פאַל פון די שוין באַהאַנדלטע.

ז) אויפֿגאַבע: ציהען א שותפותדיגע טאַנגענטע צו צוויי געגעבענע אומקרייזן. (פיג. 67)

אַנאַליז: לאָמיר אָננעמען, אַז די גראָדע AB איז די געזוכטע, ד. ה. AB איז די טאַנגענטע צו די אומקרייזן O און O′ (די ניט פונקטירטע) פאַרבינדנדיג די צענטערס O און O′ מיט די באַריר־פונקטן A און B, און ציהענדיג דורכן צענטער (O′) פון קלענערן אומקרייז אַ פּאַראַלעלע O′E צו דער טאַנגענטע



פיג. 67.

BA, וועלן מיר זיך איבערצייגן אַז די גראָדע O′E שטייט זײַלרעכט צו די ראַדיוסן OA און O′B (די ראַדיוסן זײַנען אויף דער צייכענונג ניט אָנגעוויזן צייכן זיי אַליין אָן!) ד. ה. אַז ווינקל OEO′ איז אַ רעכטער (194=י) און (139=Ш); אויב אַזוי, קען OE זײַן די טאַנגענטע פון אומקרייז OE (194=ד) (דעם אינעווייניגסטן פונקטירטן) וואָס דער ראַדיוס זײַנער OE באַטרעפט **די דיפערענץ** (OA—O′B) ווײַל O′B=EA (145). רערפון ווערט קלאָר **די לייזונג:** אַרום צענטער (O) פון גרעסערן אומקרייז ציהען מיר אַן אומקרייז (דעם אינעווייניגסטן פונקטירטן), וואָס זײַן ראַדיוס זאָל באַטרעפן **די דיפערענץ** פון די ראַדיוסן פון די געגעבענע אומקרייזן, דורכן צענטער פון קלענערן אומקרייז ציהען מיר אַ טאַנגענטע (O′E) צום דאָזיגן נײַגעצויגענעם אומקרייז (194=יא) אָדער (196=כ!) די זײַלרעכטע צו דער דאָזיגער טאַנגענטע פון ביידע געגעבענע צענטערס וועלן שנײַדן די געגעבענע אומקרייזן אין די באַריר־פונקטן (A) און (B) פון דער געזוכטער טאַנגענטע AB, וועלכע הייסט **אויסנווייניגסטע טאַנגענטע.** פון (194=יב) איז קלאָר, אַז אַזעלכע אויסנווייניגסטע טאַנגענטעס זײַנען מעגלאַך צוויי. (AB און A′B′) **נאָך** קען מען ציהען צוויי **אינעווייניגסטע טאַנגענטעס** DC און D′C′ צו די געגעבענע אומקרייזן. אַנאַליזירנדיג דעם פאַל, וועלן מיר זיך איבערצײַגן, אַז די גראַדע, O′E′ וועלכע איז (מיטן זעלבן געדאַנקענגאַנג ווי פריהער) פּאַראַלעל צו דער דאָזיגער אינעווייניגסטער טאַנגענטע, איז אַליין די טאַנגענטע פון אומקרייז O′E′ (דעם גרייסן פונקטירטן), וואָס איז געצויגן מיטן ראַדיוס וואָס באַטרעפט **די סומע** פון די ראַדיוסן פון די געגעבענע אומקרייזן. אין

דעם פאל דארף מען ביי דער אויפשטעלונג ציהען דורכן צענטער פון קלענעאן אומקרייז אַ טאַנגענטע צום אומקרייז (דעם גרויסן פונקטירטן) וואָס זיין ראדיוס באַטרעפט **די סומע** פון די ראדיוסן פון די געגעבענע אומקרייזן, און די באַרירפונקטן פון די געזוכטע **אינעווייניגסטע טאנגענטעס** וועלן זיך אליין אנמערקן ווי פריער. דער **באַווייז** פון דער אויפשטעלונג איז לייכט. פון דער אויפשטעלונג ווערט קלאָר, אז צו צוויי געגעבענע אומקרייזן, וועלכע שניידן זיך ניט און ליגן איינער אויסער דעם צווייטן קען מען ציהען 4 טאנגענטעס: א פאר אינעווייניגסטע א פאָר אויסנווייניגסטע.

199. אויפגאבעס א) באַווייזן, אז דער געאמעטרישער ארט פון

1) די צענטערס פון אומקרייזן מיט א געגעבענעם ראדיוס, וואס באַרירן א געגעבענע גראָדע, **זיינען** צוויי גראָדע פאראלעלע צו דער געגעבענער און דערווייטערט פון איר אויף א שטרעקע, וואס איז גלייך דעם געגעבענעם ראדיוס;

2) די צענטערס פון אומקרייזן, וואס באַרירן א געגעבענע גראדע אין א געגעבענעם פונקט איר, **איז** א זיילרעכטע צו דער דאזיגער גראדער אין דאזיגן פונקט;

3) די צענטערס פון אומקרייזן, וואס באַרירן ביידע זייטן פון א געגעבענעם ווינקל, **איז** די ביסעקטריסע פון דאזיגן ווינקל;

4) די צענטערס פון אומקרייזן מיט א געגעבענעם ראדיוס, וואס באַרירן (פון אויסנווייניג אדער פון אינעווייניג) א געגעבענעם אומקרייז, **איז** אן אומקרייז, קאנצענטריש מיטן געגעבענעם, (געצייכנט מיט א ראדיוס, וואס באַטרעפט די סומע אדער דיפערענץ פון געגעבענעם ראדיוס מיטן ראדיוס פון געגעבענעם אומקרייז);

5) די מיטנפונקטן פון גלייכע כאָרדעס פון א געגעבענעם אומקרייז, **איז** אן אומקרייז, קאנצענטריש מיטן געגעבענעם, געצייכנט מיט א ראדיוס, וואס איז גלייך דער ווייטקייט פון איינער פון די כאָרדעס פון צענטער

6) די צענטערס פון אומקרייזן, וואס שניידן אויס פון א געגעבענער גראדער כאָרדעס פון א געגעבענער לייַנג, **איז** א גראדע, פאראלעל צו דער געגעבענער; ווי קען מען געפינען די ווייטקייט צווישן איר און דער געגעבענער?

7) די מיטנפונקטן פון וועלכע די טאנגענטעס צו א געגעבענעם אומקרייז זיינען אלע גלייך לאנג, **איז** אן אומקרייז, קאנצענטריש מיטן געגעבענעם; ווי קען מען געפינען די לייַנג פון זיין ראדיוס?

8) די מיטנפונקטן פון **אלע** כאָרדעס פון א געגעבענעם אומקרייז, וואס ציהען זיך דורך א געגעבענעם פונקט, **איז** אן אומקרייז, וואס זיין דיאמעטער איז די גראדע, וועלכע פארבינדט דעם געגעבענעם פונקט מיטן צענטער פון אומקרייז (2 פאלן):

9) די

פונקטן, פון וועלכע די טאנגענטעס צו א געגעבענעם אומקרייז בילדן א ווינקל פון א געגעבענער גרויס, אין אן אומקרייז קאנצענטריש מיטן געגעבענעם; 10) די מיטנפונקטן פון אלע כאָרדעס, וואס זיינען פאראלעל צו א געגעבענער גראדער, אין א דיאמעטער, וואס שטייט ווינקלרעכט צו דער געגעבענער גראדער; 11) די צענטערס פון אומקרייזן, וואס באריִרן יעדן פון צוויי געגעבענע קאנצענטרישע אומקרייזן אין אן אומקרייז קאנצענטריש מיט די געגעבענע; ווי גרויס קען זיין דער ראדיוס פון געזוכטן געאמעטרישן ארט? (2 פאלן);

ב) באווייזן אז: 12) פארבינדנדיג א וועלכן עס איז פונקט פון אן אומקרייז מיט די שפיצפונקטן פון זיינעם אן ארייננגעצייכנטן רעגלמעסיגן 3־עק, וועלן מיר באקומען דריי שטרעקעס, פון וועלכע די גרעסטע באטרעפט די סומע פון די איבעריגע צוויי; 13) ארייננצייכענענדיג אין א געגעבענעם 3־עק אן אומקרייז און ציהענדיג נאך 3 טאנגענטעס צום דאזיגן אומקרייז, וועלכע זאלן שניידן די זייטן פון געגעבענעם 3 עק, וועלן זיך אפהאקן דריי קלענערע 3=עקן, וואס די סומע פון זייערע פערימעטערס איז גלייך דעם פערימעטער פון געגעבענעם גרויסן 3־עק; 14) אין א רעגלמעסיגן זעקסעק, זיינען עטלאכע דיאגאנאלעס פאראלעל צווישן זיך, עטלאכע ווינקלרעכט איינע צו דער אנדערער און עטלאכע בילדן א רעגלמעסיגן 3=עק; 15) דער ראדיוס פון אן אומקרייז, וואס איז ארייננגעצייכנט אין א רעכטווינקלדיגן 3־עק, באטרעפט די העלפט פון דיפערענץ צווישן דער סומע פון זיינע קאטעטעס מיט דער היפאטענוזע; 16) דער ראדיוס פון אן אומקרייז, וואס איז ארייננגעצייכנט אין א גלייכזייטיגן 3־עק, באטרעפט די העלפט פון ראדיוס פון אומקרייז, וואס איז ארומגעצייכנט ארום זעלבן 3=עק

17) די טאנגענטעס צו אן אומקרייז אין די שפיצפונקטן פון זיינעם אן ארייננגעצייכנטן רעכטעק בילדן א ראמב; 18) אין א פילעק מיט א גראדער צאל זייטן איז די סומע פון ערשטן, דריטן, פינפטן און א. וו. ווינקלען גלייך דער סומע פון צווייטן, פערטן, זעקסטן א. א. וו.

19) כאָרדעס וואס בילדן גלייכע ווינקלען מיט א דיאמעטער, ארויסגייענדיג פון זיינע ענדפונקטן, זיינען ביידע גלייך; 20) די ווינקלרעכטע צו א כאָרדע אין אירע ביידע ענדפונקטן האקן אפ פון א וועלכן עס איז דיאמעטער גלייכע שטרעקעס, מעסטנדיג פון זיינע ענדפונקטן;

21) אראפלאזנדיג צוויי ווינקלרעכטע פון די ענדפונקטן פון א דיאמעטער אויף א וועלכע עס איז כאָרדע, אדער איר פארלענגערונג, וועלן די פוספונקטן פון די דאזיגע ווינקלרעכטע זיין גלייך דערווייטערט פון די ענדפונקטן פון דער דאָזי־

גער כאָרדע; 22) יעדע גראָדע, וואָס ציִהט זיך דורכן באַריִרפּונקט פון צוויי אומקרייַזן, האַקט אָפּ פון די אומקרייַזן בויגנס מיט גלייכע געהעריִגע צענטערווינקלען; 23) זעה אויפגאַבע [22]: אַז די ראַדיוסן פון די אומקרייַזן, וואָס ציִהען זיך דורך די ענדפּונקטן פון דער גראָדער זייַנען פּאַ-ראַלעל; 24) די ענדפּונקטן פון צוויי פּאַראַלעלע דיאַמעטערס פון צוויי אומקרייַזן, מיט איין באַריִרפּונקט, ליגן אויף איין גראָדער ליניע מיט אים; 25) דער קלענערער פון צוויי קאָנצענטרישע אומקרייזן האַקט אָפּ פון זייערער אַ וועלכער עס איז שותּפותדיִגער כאָרדע גלייַכע שטרעקעס, מעסטנ-דיג פון אירע ענדפּונקטן אויפן גרעסערן אומקרייז; 26) ווען צוויי גלייַכע אומקרייַזן שנייַדן זיך אַזוי, אַז די צענטערליניע איז גלייַך זייער שותּפותדיִגער כאָרדע, דאַן בילדן זייערע ראַדיוסן געצויגן דורך די שניטפּונקטן א קוואַדראַט; 27) אַן אויסערקרייזווינקל, וואָס זייַנע זייַטן גייען דורך די ענדפּונקטן פון אַ דיאַמעטער איז שטענדיג אַ שפּיציגער; אַן אינקרייזווינקל מיט די זעלבע איינגעשפּאַנטן איז שטענדיג אַ טעמפּער; 28) אַן אַרייַנגעצייכנטע טראַפּעציע מוז זיין אַ גלייַכלעגדיגע; 29) פּאַרלייַנ-גערנדיג יעדער פּאָר אַנטקעגנדיגע זייטן פון אַן אַרייַנגעצייכנטן פירעק ביז זייערע שניטפּונקטן, וועלן זיך די ביסעקטריסעס פון די באַקומענע אויסער-קרייַזווינקלען שנייַדן מיט אַ רעכטן ווינקל; 30) די הויכליניעס פון אַ דרייַעק זיינען די ביסעקטריסעס פון די ווינקלען, וועלכע מיר באַקומען פאַר-בינדנדיג די פוספּונקטן פון די דאָזיגע הויכליניעס; 31) די גראָדע, וועלכע פאַרבינדן די שפּיצפּונקטן פון אַן אַרומגעצייכנטן 3עק מיט די אַנט-קעגנדיגע באַרירפּונקטן, שניידן זיך אין איין פּונקט; 32) אויפ-שטעלנדיג אויף יעדער זייט פון אַ דרייַעק צו אַ גלייַכלעגדיגן 3עק מיט אַ גרונדווינקל פון 30° און פאַראייניגנדיג די דאַכפּונקטן פון די דאָזיגע גלייַכ-לעגדיגע דרייַעקן, וועלן מיר באַקומען אַ גלייַכזייטיגן דרייַעק;

ג) אויסרעכענונג: 33) א געגעבענער פּונקט איז דערווייַ-טערט פון צענטער פון אַ געגעבענעם אומקרייַז מיט אַ ראַדיוס פון 12 סמ. אויף אַ שטרעקע, וואָס באַטרעפט 18 סמ. (2-נס: 8 סמ.) ווי לאַנג זייַנען די קירצ-סטע און ווייַטסטע שטרעקעס צווישן פּונקט און אומקרייַז (באַטראַכטן ביידע לאַגעס); 34) די קירצסטע און ווייַטסטע שטרעקעס צווישן אַן אומ-קרייז און אַ פּונקט, וואָס ליגט אין אים (2-נס: אויסער אים) באַטרעפן 6 צל. און 10 צל.; ווי לאַנג איז דער ראַדיוס פון אומקרייז? (פאַר ביידע פאַלן); 35) צוויי כאָרדעס פון 6 סמ. און 8 סמ. די לייַנג, בילדן אַ רעכטן אומקרייַזווינקל; אויף וויפיל איז יעדע פון זיי דערווייַטערט פון צענטער?

36) דער דיאַמעטער פון אַן אומקרייז באַטרעפט 16 צל., אין ווילרעכטע פון זיינעם אַן ענדפונקט אויף אַ טאַנגענטע צום זעלבן אומקרייז איז 10 צל. די לייִנג; ווי לאַנג איז די זיילרעכטע פון צווייטן ענדפונקט אויף דערזעלבער טאַנגענטע? 37) אַ כאָרדע שפּאַנט אַ בויגן פון 90^0 און איז 20 סמ. די לייִנג, אויף וויפיל סמ. איז זי דערווייטערט פון דעם צענטער? 38) אין אַ פירעק זיינען די ווינקלען (174, 180) א און ד רעכטע, aגווx באַטרעפט 35^0, xווd באַטרעפט 45^0, ווי גרויס איז דער שפּיציגער אווy? 39) די גרעסטע שטרעקע צווישן צוויי פונקטן פון צוויי קאָנצענטרישע אומקרייזן באַטרעפט 16 סמ., די קלענסטע—2 סמ., ווי גרויס זיינען די ראַדיוסן פון די דאָזיגע אומקרייזן? 40) ווי גרויס איז אן אויסערקרייזווינקל, וועלכער האָט אים פון אומקרייז צוויי בויגנס, וועלכע באַטרעפן אַ זעקסטל און אַן אַכטל פון אומקרייז?
41) דער פּערימעטער פון אַן אַרומגעצייכנטער טראַפּעציע באַטרעפט 24 סמ.; ווי לאַנג איז איר מיטלסטע שטרעקע? 42) צוויי גלייכע אומקרייזן באַריִרן זיך און באַריִרן אינעווייניג אויסנווייניג (2־נס: אינעווייניג) אַ דריטן גרעסערן אומקרייז; דער דרייעק, וואָס איז אויפגעשטעלט אויף זייערע צענ־טערס, פאַרמאָגט אַ פּערימעטער פון 36 סמ.; ווי לאַנג איז דער ראַדיוס פון גרעסערן אומקרייז? 43) ווי גרויס זיינען די ווינקלען פון אַן אַרומ־געצייכנטער טראַפּעציע, אויב דער צענטערווינקל, וואָס שפּאַנט איר דיאַגאָנאַ־לע באַטרעפט $^3/_4$d? 44) דער ראַדיוס פון אומקרייז, וואָס איז אַרומגעצייכנט אַרום אַ רעכטווינקלדיגן דרייעק, באַטרעפט $8^1|_2$ צל. די קאַטעטן מעס פון דאָזיגן דרייעק—15 צל. און 8 צל.; ווי גרויס איז דער דיאַמעטער פון אומקרייז, וואָס איז אַריינגעצייכנט אין זעלבן דרייעק? 45) די זייטן פון אַ רעגלמעסיגן פינפעק (2־נס: זעקסעק) שניידן זיך ביי דער פאַר־לייִנגערונג אין עטלאַכע פונקטן און בילדן 5 (2־נס: 6) נייע ווינקלען; וויפיל באַטרעפט די סומע פון די דאָזיגע ווינקלען? 46) אַ פירעק איז אַריינגעצייכנט אין אַן אומקרייז; וויפיל באַטרעפט די סומע פון די אומקרייז־ווינקלען, וואָס שפּאַנען די פיר זייטן פון פירעק? 47) זעה די אויפגאַבע [46]: די דיאַגאָנאַלען פון פירעק שניידן זיך מיט אַ רעכטן ווינקל; די שטרעקע צווישן די מיטנפּונקטן פון די דיאַגאָנאַלען באַטרעפט 8 סמ.; ווי גרויס איז די שטרעקע צווישן צענטער און דעם שניטפּונקט פון די דיאַגאָנאַ־לען? 48) דריי אומקרייזן באַריִרן זיך אַלע פון אויסנווייניג; זייערע צענטערליניעס בילדן אַ דרייעק מיט די זייטן פון 26 צל. 22 צל. און 16 צל די לייִנג ווי לאַנג זיינען די ראַדיוסן? 49) צוויי אומקרייזן

וואָס באַריִרן זיך אויסנווייניג, באַריִרן איינצייטיג פון אינעווייניג ביידע זייטן פון אַ ווינקל, וואָס באַטרעפט 30°; די צענטערל'יניע באַטרעפט 16 סמ.; ווי לאַנג זיינען די ראַדיוסן? 50) וואָס פאַר אַ קעגנזייטיגע לאַגע פאַרנעמען צוויי אומקרייזן, אויב דער קלענערער ראַדיוס באַטרעפט דריי-זיבעטל פון גרעסערן און דער גרעסערער זיבן-דריטל פון דער צענטערל'ניע?

ד) אויפשטעלונגען: 1) ציִהען צו אַן אומקרייז אַ טאַנגענטע, וואָס זאָל זיין פּאַראַלעל צו אַ געגעבענער גראָדער; 2) אין אַ קרייז איז געגעבן אַ פּונקט P; דורכן דאָזיגן פּונקט ציהען אַ כאָרדע, וואָס איר ענדע-פּונקטן זאָלן זיין גלייך דערווייַטערט פון אַ צווייטן געגעבענעם פּונקט P';

3) געגעבן זיינען אַן אומקרייז און אַ פּונקט אויסער איִם; דורכן געגעבענעם פּונקט ציהען צום אומקרייז אַ סעקאַנטע, אַזוי, אַז איר אויסנווייניגסטע-טייל זאָל זיין גלייך דער כאָרדע, וואָס זי בילדעט; 4) מיט אַ געגעבענעם ראַדיוס ציהען אַן אומקרייז, וואָס זאָל באַריִרן אַ געגעבענע גראָדע און וואָס זיין צענטער זאָל זיין גלייך דערווייַטערט פון די ענדפּונקטן פון אַ געגעבענער שטרעקע; 5) דאָסזעלבע וואָס [4]: דער צענטער זאָל זיין גלייך דערווייַטערט פון צוויי גראָדע, וועלכע שניידן זיך; 6) דאָסזעלבע וואָס [4]: דער צענטער זאָל זיין דערווייַטערט פון אַ געגעבענעם פּונקט אויף אַ געגעבענע שטרעקע; 7) מיט אַ געגעבענעם ראַדיוס ציהען אַן אומקרייז וואָס זאָל באַריִרן אַ געגעבענע גראָדע און אַ צווייטן געגעבענעם אומקרייז;

8) אין אַ געגעבענעם אומקרייז, ציהען אַ כאָרדע פון אַ געגעבענער לייַנג אַזוי, אַז די כאָרדע זאָל זיין פּאַראַלעל צו אַ געגעבענער גראָדער;

9) דאָסזעלבע וואָס [8]: די כאָרדע זאָל שניידן אַ געגעבענע גראָדע מיט אַ געגעבענעם ווינקל; 10) געפינען אין אַ דרייעק אַזאַ פּונקט, וואָס די שטרעקעס צווישן איִם און די שפּיצפּונקטן פון דרייעק זאָלן בילדן דריי גלייכע ווינקלען; 11) דורך אַ פּונקט, וואָס איז געגעבן אויפן אומקרייז, ציהען אַ כאָרדע, וואָס זאָל זיין דערווייטערט פון צענטער אויף אַ געגעבענער לייַנג; 12) דורך אַ פּונקט, וואָס ליגט אין דעם קרייז, ציהען אַ כאָרדע, וואָס זאָל באַטרעפן אַ געגעבענע לייַנג; 13) דורך צוויי באַליביגע פּונקטן, וואָס ליגן אין דעם קרייז, ציהען צוויי פּאַראַלעלע און גלייך לאַנגע כאָרדעס.

14) דורך צוויי פּונקטן, וואָס ליגן אין דעם קרייז, ציהען צוויי גלייך לאַנגע כאָרדעס וואָס זאָלן זיך שניידן מיט אַ געגעבענעם ווינקל; 15) געגעבן איז אַן אומקרייז און אַ גראָדע; צווישן אומקרייז און דער גראָדער אַוועק-שטעלן אַ זיילרעכטע צו דער דאָזיגער גראָדער אַזוי, אַז דער אומקרייז זאָל האַקן די זיילרעכטע אויף דער העלפט ד. ה. דער טייל פון דער זיילרעכטער,

וואָס איז אַ כאָרדע פון אומקרייז, זאָל זיין גלייך־איר אויסנווייניגסטער שטרע־קע ביז פּיספּונקט. 16) אויף אַ געגעבענער גראָדער געפינען אַ פּונקט, וואָס די טאַנגענטעס צו צוויי געגעבענע אומקרייזן פון דאָזיגן פּונקט זאָלן בילדן גלייכע ווינקלען מיט דער געגעבענער גראָדער. (אָנווייזונג: נעמען די געגעבענע גראָדע פאַר אַ סימעטריאַקס, געפינען אַן אומקרייז, וואָס זאָל זיין סימעטריש מיט איינעם פון די געגעבענע צו דער דאָזיגער אַקס און ציהען אַ שותּפותדיגע טאַנגענטע צום צווייטן געגעבענעם אומקרייז מיטן סימעטרישן צום ערשטן);

ה) אויפשטעלן אַן **אַריינגעצייכנטן דרייעק**, ווען געגעבן זיינען (זעה די באַצייכענונגען אין 174): **דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז** און נאָך: 1) a,b 2) c **א** 3) **ב** b 4) **א**,**ב**

5) H_3 a 6) H_3 **א** 7) p_2, H_3 8) H_3, c 9) M_3, c 10) p_2, p_3

11) H_3 **ג** 12) H_1 **ג** 13) M_3 **ג** 14) B_3, H_3 15) M_3, H_3

16) HB_3 17) $(a+b)$, **ג** 19) $(a-b)$, **ג** 19) $c, (a-b)$ 20) דער פּרימטר און **ג**

ו) אויפשטעלן אַן **אַריינגעצייכנטן גלייכזייטיגן דרייעק**, ווען געגעבן זיינען: 21) **דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז** און a 22) דער ראַדיוס און c 23) דער ראַדיוס און **א** 24) דער ראַדיוס און **ג** 25) דער ראַדיוס און H_3 26) די דיפערענץ צווישן H_3 און דעם ראַדיוס און **ג** 27) די סומע פון ראַדיוס מיט c און **ג** 28) די דיפערענץ צווישן c מיטן ראַדיוס און **ג**.

ז) אויפשטעלן אַן **אַריינגעצייכנטן גלייכזייטיגן דרייעק**, ווען גע־געבן זיינען: 29) **דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז** און 30) די סומע פון ראַדיוס מיט a 31) די דיפערענץ צווישן a מיטן ראַדיוס 32) די דיפערענץ צווישן H_3 מיטן ראַדיוס;

ח) אויפשטעלן **אַן אַרומגעצייכנטן דרייעק**, ווען געגעבן זיינען: **דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז** און נאָך:

33) c, **א** 34) **א**, **ב** 35) a, **ג** 36) c, **ג** 37) H_3, a 38) H_3, **א**

39) p_2, H_3 40) B_3, **ג** 41) H_3, **ג** 42) $c, (a-b)$ 43) $(a-b)$, **א**

44) $(a-b)$, **ב**;

ט) אויפשטעלן **אַן אַריינגעצייכנטן רעכטווינקלדיגן דרייעק**, ווען געגעבן זיינען: 45) **דער ראַדיוס פון אַריינגעצייכנטן אומקרייז** און a 46) דער ראַדיוס און **א** 47) דער ראַדיוס און c; 48) דער ראַדיוס און B_3 49) דער ראַדיוס און H_3 50) דער

ראַדיוס און די דיפערענץ $(a-в)$;

י) אויפשטעלן **אַן אַרומגעצײַכנטן גלײַכלעגדיגן דרײַעק**, ווען געגעבן זײַנען: 51) דער **ראַדיוס פון אַרומגעצײַכנטן אומקרײַז** און **א** 52) דער ראַדיוס און **ג** 53) דער ראַדיוס און c 54) דער ראַדיוס און H_3 55) די דיפערענץ צווישן H_3 און דעם ראַדיוס און **ג**;

יא) אויפשטעלן **אַן אַרײַנגעצײַכנטן פּירעק**, ווען געגעבן זײַנען (זעה די באַצײַכענונג אין 189): דער **ראַדיוס פון אַרומגעצײַכנטן אומקרײַז**, די זײַט a און נאָך: 56) c,b 57) **א**b 58) **א**,c 59) **א,ב** 60) **ב,ג** 61) **ג,ד** 62) **א**x 63) c,x 64) y,b 65) y,x 66) **ה**b 67) **ה**,x 68) **א,ה** 69) **ג,ה**

יב) אויפשטעלן **אַן אַרײַנגעצײַכנטע טראַפּעציע**, ווען געגעבן זײַנען: דער **ראַדיוס פון דעם אַרומגעצײַכנטן אומקרײַז** און נאָך: 70) **א**,a 71) x,a 72) c,a 73) **ה**,a 74) H,a 75) H,x

יג) אויפשטעלן **אַן אַרומגעצײַכנטן פּירעק**, ווען געגעבן זײַנען: דער **ראַדיוס פון דעם אַרײַנגעצײַכנטן אומקרײַז** און נאָך: 76) **א,ב,ג** 77) **אג**a 78) **בג**a 79) b**א**a 80) x**א**a 81) x**אב** 82) b**ב**a 83) a**ב**x;

יד) אויפשטעלן **אַן אַרומגעצײַכנטע טראַפּעציע**, ווען געגעבן זײַנען: דער **ראַדיוס פון דעם אַרײַנגעצײַכנטן אומקרײַז** און נאָך: 84) **ב**a 85) x,a 86) x,b 87) b,x 88) **ב**$(a+b)$ 89) **ב**$(a-b)$ 90) **א,ב** 91) **א**b 92) db 93) **א**$(a-c)$;

טו) אויפשטעלן אַ פּירעק, וואָס זאָל קענען אַרײַנגעצײַכנט ווערן אין אַן אומקרײַז, ווען געגעבן זײַנען: די עלעמענטן a און b און נאָך: 94) c**ב** 95) **א**c 96) **א,ב** 97) **ג,ד** 98) **ב**y 99) **ב**,x=y 100) c**ה**, געגעבן זײַנען: די עלעמענטן x,a און נאָך: 101) **ב**c 102) **א,ב** 103) **ג,ד** 104) **ב**y 105) **ב,ה**.

טז) אויפשטעלן אַ פּירעק, וואָס זאָל קענען אַרומגעצײַכנט ווערן אַרום אַן אומקרײַז, ווען געגעבן זײַנען די עלעמענטן a און b און נאָך: 106) **א**,c 107) **ב**,c 108) xc 109) **א,ב** 110) **א**,x

יז) אויפשטעלן אַ פּירעק, וואָס אין אים און אַרום אים זאָל קענען אַרײַנגעצײַכנט און אַרומגעצײַכנט ווערן אַן אומקרײַז, ווען געגעבן זײַנען די עלעמענטן: 111) דער ראַדיוס פון דעם אַרײַנגעצײַכנטן אומקרײַז און a מיט **ב** 112) דער אויבנדערמאָנטער ראַדיוס און a מיט **א** 113) דער

אויבנדערמאָנטער ראַדיוס און a מיט ג 114) דער אויבנדערמאָנטער ראַדיוס און (a+c) מיט א 115) a,א,ב 116) a,ג,ד 117) xba 118) a,b,ב 119) a,x,ב 120) דער ראַדיוס פון אַרומגעצייכנטן אומקרייז אין a מיט b 121) דער ערשטדערמאָנטער ראַדיוס און a מיט x 122) דער ערשטדערמאָנטער ראדיוס און a מיט ב

123) דער ערשטדערמאָנטער ראַדיוס און (a+b) מיט x 124) דער ערשטדערמאָנטער ראַדיוס און (a+b) מיט ב 125) דער ערשטדערמ. ראַדיוס און (x+b) מיט a.

200. אויפגאַבעס. אַלגעמיינע אָפּטיילונג.

1) אויף דער זייט AB פון ווינקל ABC זיינען אָנגעמערקט דריי פונקטן K, P און T, אַרויסגייענדיג פון שפּיצפּונקט B; זייער ווייטקייט פון שפּיצפּונקט באַטרעפט כסדר 18 צל., 25 צל. און 32 צל.; די ווילרעכטע פון די פּונקטן K און T אויף דער צווייטער זייט פון זעלבן ווינקל באַטרעפן 17 צל. און 19 צל.; ווי לאַנג איז די ווילרעכטע פון פּונקט P אויף דער־זעלבער זייט? אויף וועלכע שטרעקעס ווערט די געזוכטע ווילרעכטע געהאַקט דורך דער גראָדער, וואָס פאַרבינדט דעם פּונקט K מיטן פוספּונקט פון דער ווילרעכטער פון פּונקט T?

2) אויף ביידע קאַטעטעס פון אַ רעכטווינקלדיגן דרייעק, זיינען אויפגע־שטעלט 2 קוואַדראַטן אַזוי, אַז דער רעכטער ווינקל פון געגעבענעם דרייעק איז בא זיי אַלע שותּפותדיג; פון די שפּיצפּונקטן פון די קוואַדראַטן, וואָס ליגן אַנטקעגן דעם רעכטן ווינקל פון געגעבענעם דרייעק, זיינען אַראָפּגעלאָזן צוויי ווילרעכטע אויף דער היפּאָטענוזע פון דאָזיגן דרייעק; באַווייזן אַז די סומע פון די דאָזיגע ווילרעכטע איז גלייך דער לייַנג פון דער היפּאָטענוזע פון געגעבענעם דרייעק.

3) אַ שטרעקע AB ווערט געשניטן אין איין אַ פּונקט O דורך אַ גראָדער CD אַזוי, אַז AC און BD שטייען ווילרעכט צו דער גראָדער CD; באַווייזן אַז די ווילרעכטע KT, וואָס איז אַראָפּגעלאָזן פון דעם מיטנפּונקט K פון דער געגעבענער שטרעקע אויף דער גראָדער CD באַטרעפט די העלפט פון דער סומע פון ביידע ווילרעכטע AC און BD? (ד. ה. אַז ABCD איז אַן אויסגעדרייטע טראַפּעציע)

4) די פּראָיעקציעס פון צוויי שכנותדיגע זייטן פון אַ ראָמב אויף אַ גראָ־דער, וואָס ליגט אויסער אים, זיינען גלייך צווישן זיך; דער ווייטסטער שפּיצ־פּונקט פון ראָמב איז דערווייטערט פון דער דאָזיגער גראָדער אויף 8 צל., דער נאָנטסטער אויף 12 צל., אויף וויפיל זיינען דערווייטערט פון דער דאָזי־

גער גראָדער די איבעריגע שפּיצפּונקטן פון און וועלכע דיאַגאָנאַלע קען מען אויסרעכענען פון די געגעבענע גרויסן?

5) אַ כאָרדע פון אַ געגעבענעם אומקרייז באַטרעפט 18 סמ.; זי איז איינגעטיילט אין דריי גלייכע שטרעקעס און אין די אָנגעמערקטע פונקטן ווינע אַוועקגעשטעלט ווילרעכטע צו איר, וועלכע שניידן דעם אומקרייז (פון איין זייט פון דער כאָרדע) אין צוויי פונקטן A און B, ווי לאַנג איז די שטרעקע AB?

6) די קאַטעטע AB (פיג. 29, זײַטל 74) פון אַ רעכטווינקלדיגן דרייעק איז א כאָרדע פון אן אומקרייז, וועלכער שניידט די היפּאָטענוזע BC און פונקט E און די צווייטע קאטעטע AC אין פונקט T; ווי גרויס איז דער ווינקל צווישן דער גראָדער BC און דער כאָרדע ET? (d)

7) דער דיאַמעטער AB פון אן אומקרייז באַטרעפט 18 סמ.; פון איין און און דערזעלבער זייט פון דאזיגן דיאַמעטער זײַנען אָנגעמערקט 2 בויגנס AD און BC (יועלכע פאררעקן ניט איינער דעם צווייטן) אזוי אז בויגן AD איז דרײַ מאָל אזוי גרויס ווי בויגן BC; די גראָדע DC, וואָס ציהט זיך דורך די ענדעפּונקטן פון די אָנגעמערקטע בויגנס, שניידט די פאַרלייַנגערונג פון דיאַמעטער אין פונקט E. ווי לאנג איז די שטרעקע CE? (9)

S) צוויי כאָרדעס פון אן אומקרייזווינקל באַטרעפן 8 סמ. און 12 סמ.; דורכן שניטפּונקט פון דער ביסעקטריסע פון דאָזיגן ווינקל מיטן אומקרייז ווערט געצויגן א כאַרדע פאַראַלעל צו דער קלענערער פון די געגעבענע כאַרדעס; ווי לאַנג איז די נייַגעצויגענע כאַרדע? (12)

9) צוויי טאַנגענטעס צו איין אומקרייז שנײַדן זיך אין פונקט P מיט אַ ווינקל פון $d]_3^4$; די לייַנג פון איין טאַנגענטע באַטרעפט 8 על.; ווי לאנג איז די שטרעקע צווישן P מיטן צענטער? (16)

10) פון שפּיצפּונקט C פון אַ געגעבענעם 3עק ABC איז אָפּגעלייגט אויף דער זײַט CA אַ שטרעקע CD, וואָס באַטרעפט א זעקסטל פון CA, דורכן פונקט D ווערט געצויגן אַ גראָדע, פאַראַלעל צו AB ביזן שניטפּונקט E מיט דער זײַט CB; באַווײַזן, אַז CE באַטרעפט אויך אַ זעקסטל פון CB?

11) די זײַט פון אַ רעגלמעסיגן פילעק איז גלײַך זיין ראַדיוס. וויפיל זײַטן פאַרמאָגט דער פילעק? (6)

12) די סומע פון די אינעווייניגסטע ווינקלען פון אַ פילעק באַטרעפט 39d; וויפיל דיאַגאַנאַלעס לאָזן זיך ציהען אין אים? (!)

באשטימונג—определение
אויבערפלעכע, פלעכע поверхность
די פלאטשע - плоскость
די גראָדע (ליניע) прямая
די קרומע „ кривая—
ווערטיקאַלע,פּאָלגראָדע веритикальная
האָריזאָנטאַל.וואָגגראָד.горизонтальная
אויסמעסטונג измерение
טעאָרעמע, לערזאַץ, געזעץ. זאַץ—теорема
אַקסיאָמע, גרונדזאַץ—аксиома
גלייכקייט—равенство
גלייכונג—уравнепие
גלייכ. פאָזיטיוו. זאַץ—прямая теор.
פאַרקערט „ — обратная „ —
גלייכ. נעגאַט. ז. противоположная
פאַרק. „ обратная против.
שלוסזאַץ—следствие
די שטרעקע—отрезок
דער קרייז—круг
דער אומקרייז—окружность
די אויפשטעלונג—построение
רעכטער ווינקל—прямой угол
טעמפּער „ — тупой „
שפּיציגער „ — острый „
גענייגטע—наклонная
זיילרעכטע(ט) препендикуляр(по)
פוספונקט—основание
מיטנזיילרעכטע перпен. в серединѣ
ביווינקלען—прилежащ. углы
שצרעקיווינקלען „ смежные
שערווינקלען „ веритикальн.

בייטווינקלען накрест лежащ.„
איינזייטיגע—односторонние
היפּווינקלען—соответственные
סעקאַנטע, שניידליניע—секущая
רעכטווינקלדיגער прямоугльный
גלייכזייטיגער—равносторонніи
גלייכלענדיגער—равнобедренный
שפּיצווינקלדיגער косоугольный
טעמפּווינקלדיגער тупоугольный
דרויסנווינקל внешній угол
הייכליניע פון דר.—высота тр.
דאַכווינקל—угол при вершинѣ
מיטלסטע שטרעקע средняя линия
מעדיאַנע, מיטנליניע—медиана
קאָנגרועטע,דעקיגע равные тр-ки
גלייכע איינשטימיגע זייטן
сходств. стороны
גרונדזייט — основание тр-ка
רעכטעק—прямоугольник
רעגלמעסיגער פילעק
правильный многоуг-к
באַרירליניע,טאַנגענטע касательная
סטרונע, כאָרדע—хорда
די ווייטקייט, דער מרחק, די שטרעקע
разстояние
דער בויגן—дуга
אומקרייזווינקל—вписан. уг.
אויסערקרייזווינקל—описан. уг.
אַריינצייכענען—вписать
אַרומצייכענען—описать

פארלאג „קולטור ליגע“ ביאליסטאק.

1) כּללים וועגן אויסלייג
2) קריִלאָווס משלים I באנד איבערז. פון פ. קאפלאן
3) ביי דער שניי־מלכּה י. פאט
4) ביי דעם סטאָלער ״
5) מ א י אָ ״
6) מארגאריטקע אנדערסן איבערז. מ. ראַבינאָוויטש
7) וואָס דער צימער דערציילט ״ ״
8) א דין תורה מיט א כלאָץ י. רובין
9) דער הארבסט ווינט אויף דער רייזע
ריינהיימער איבערז. מ. ראַבינאָוויטש
10) וועגן א קאץ וואָס האָט אליין געמאכט אירע שפּאציִרן ר. קיפּלינג—איבערז. ס. קאנטאר
11) געאָמעטריִע מ. זאבלודאווסקי

עס דרוקט זיך:

1) וועגן ים און יבשה י. נאָוואָגרודסקי
2) לידער בוך פאר שולן און קינדערהיימען מיט נאטן
3) א סעריע וויסנשאפטליכע קינדער ליטעראטור

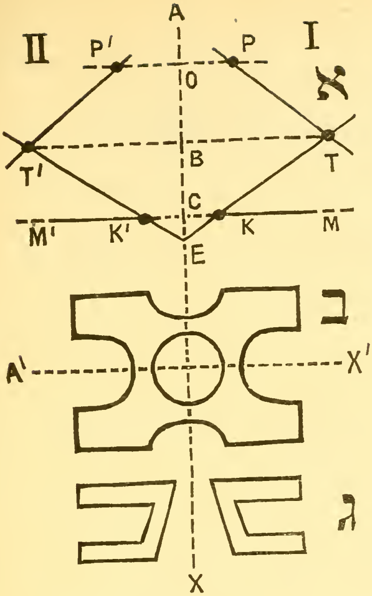
דער פארקויף פון פאַרלאג „קולטור־ליגע“ געהערט דעם

צענטראל ארבעטער קאָאפּעראטיוו
אין ביאליסטאק

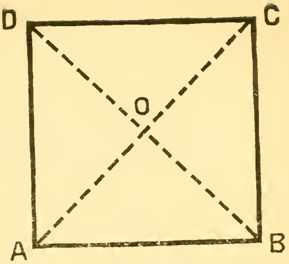
מיט באשטעלונגען זיך צו ווענדן:

צענטראל ארבעטער קאאפּעראטיוו,ביאליסטאק

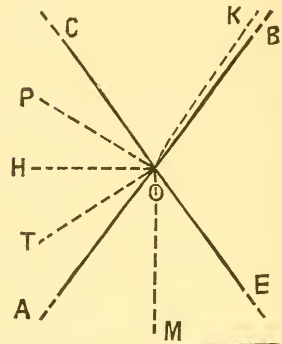
דייטשע גאס 23a



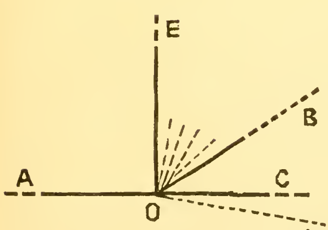
פיג. 20



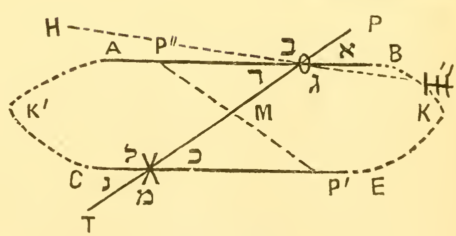
פיג. 9



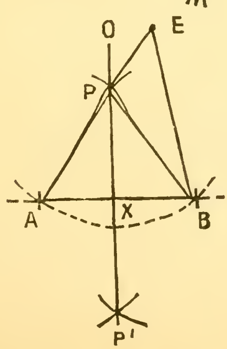
פיג. 14



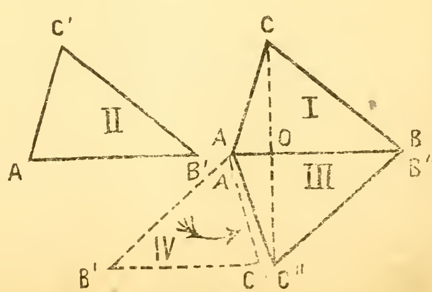
פיג. 16



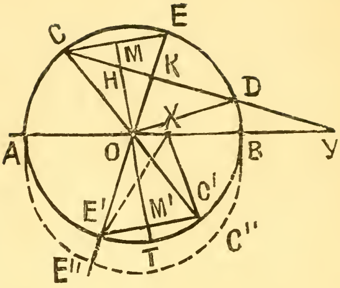
פיג. 25



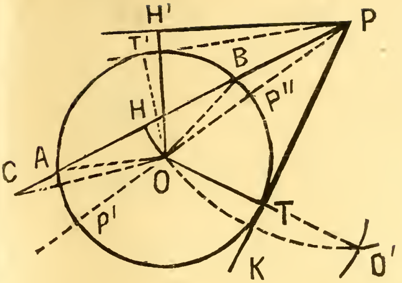
פיג. 22



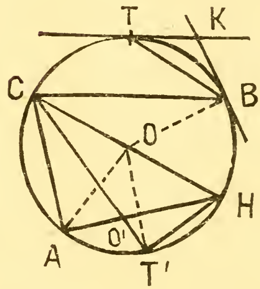
פיג. 32



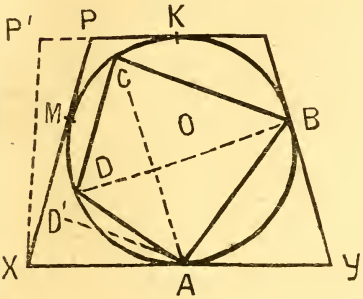
פיג. 53



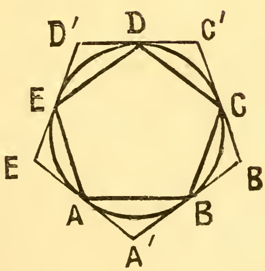
פיג. 54



פיג. 56



פיג. 61



פיג. 62

פארלאג „קולטור ליגע" ביאליסטאק

1) [illegible] וועגן [illegible]
2) קרילאָוס משלים I באנד איבערז. פון פ. קאפלאן
3) ביי דער שניי־מלכּה — י. פאט
4) ביי דעם שמאַלער "
5) מ א י אָ "
6) מאַרגאַריטקע — [illegible] איבערז. ס. ראַבינאָוויטש
7) וואָס דער צימער דערציילט "
8) א דין תורה מיט א קלאָץ — י. רוקין
9) דער [illegible] אויף דער [illegible]
[illegible] איבערז. ס. ראַבינאָוויטש
10) [illegible] א [illegible] האָט אליין געמאכט [illegible]
שפאציר — [illegible] ק פלינג — איבערז. ס. קאַזאר
11) [illegible] — ס. זאַבלודאָווסקי

[illegible]

1) [illegible] — [illegible] נאָוואָגרודסקי
2) [illegible] פאר שול, און קינדערהיימען מיט נאָטן
3) א [illegible] קינדער ליטעראַטור

דער פאַרקויף פון פארלאג „קולטור־ליגע" געהערט צום

צענטראַל ארבעטער קאָאָפּעראַטיוו

אין ביאליסטאק

מיט באשטעלונגען ווענדט זיך צו:

צענטראַל ארבעטער קאָאָפּעראַטיוו, ביאליסטאק

[illegible] 2